

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

А.С. Бєломитцев

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

ДИНАМІКА

Тексти лекцій

для студентів бакалаврських напрямів 6.050202 – «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 6.050502 – «Інженерна механіка», 6.050503 – «Машинобудування» машинобудівного факультету

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол №2 від 12.12 2013р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2014

УДК 531.3 (075)

ББК 22.2я7

Б43

Рецензенти:

К. В. Аврамов, д-р техн. наук, професор, Інститут проблем
машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України

Г. І. Львов, д-р техн. наук, професор, Національний технічний
університет «ХПІ»

Беломитцев А.С.

Б43 Теоретична механіка. Динаміка : тексти лекцій /

А.С. Беломитцев. – Х. : НТУ «ХПІ», 2014. – 126 с.

ISBN

Курс теоретичної механіки складається з лекцій із динаміки матеріальної точки та механічної системи, а також містить елементи аналітичної механіки. Теоретичний матеріал доповнюють приклади розв'язання задач, що сприяють самостійному вивченню курсу.

Призначено для студентів бакалаврських напрямів 6.050202 – «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 6.050502 – «Інженерна механіка», 6.050503 – «Машинобудування» машинобудівного факультету

Іл. 67. Бібліогр. 8 найм.

УДК 531.3 (075)

ББК 22.2я7

ISBN

© А.С. Беломитцев, 2014 р.

ВСТУП

Динаміка – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчають рух матеріальних тіл під дією сил.

Сили і рух розглядають і в попередніх розділах курсу теоретичної механіки – статиці і кінематиці.

У статиці вивчають еквівалентні перетворення систем сил, а також рівновагу матеріальних тіл під дією сил. Що станеться з тілом при порушенні умов рівноваги, як воно буде рухатися – на ці питання статика відповіді не дає.

Рух тіла розглядають в кінематиці, але тільки з геометричної точки зору, ні масу тіла, ні діючі на нього сили при цьому не враховують.

Між тим, саме сили є причиною зміни стану спокою або руху матеріальних тіл, і в динаміці встановлюють залежності між силами і кінематичними параметрами тіл, що рухаються під дією сил.

Для більшості задач механіки, що виникають на практиці, не є достатніми тільки статичні або тільки кінематичні розрахунки. Необхідно повне, тобто динамічне дослідження механічного руху, в ході якого використовують як встановлені в статиці способи спрощення систем сил, так і відомі з кінематики способи опису руху.

Задачі динаміки можна умовно розділити на дві категорії. До першої категорії відносяться задачі, в яких рух тіла (декількох тіл) відомий, і потрібно визначити сили, що його викликають; до другої – задачі, в яких, навпаки, відомі діючі на тіло сили, а його рух є шуканим. Ці задачі відповідно називають першою та другою основними задачами динаміки.

Лекція 1. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1.1. Закони динаміки Галілея – Ньютона

Найпростішим об'єктом, що вивчають в динаміці, є матеріальна точка, під якою розуміють тіло, що має кінцеву масу і настільки малі розміри, що розходженням в русі його частинок можна знехтувати, тобто матеріальна точка – це точка, яка має масу. Будь-яке тіло може бути подане як сукупність матеріальних точок. Воно має властивість інертності, яка проявляється в збереженні руху тіла при відсутності діючих на нього сил, і в поступовій зміні цього руху з плином часу, якщо на тіло починають діяти сили.

Мірою інертності матеріальної точки є її маса, яку в класичній механіці вважають величиною скалярною і сталою.

Основні закони динаміки були викладені в 1687 році в роботі І. Ньютона «Математичні начала натуральної філософії».

Перший закон або принцип інерції був сформульований Галілеєм в 1638 році. *Ізольована від зовнішніх впливів матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху.*

Систему відліку, в якій виконується принцип інерції, називають *інерціальною*. Таким чином, принцип інерції стверджує, що існує така система відліку (інерціальна), в якій матеріальна точка знаходиться в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху, якщо на неї не діють сили.

Інерціальність тієї чи іншої системи відліку може бути перевірена на підставі експериментів. Встановлено, що дуже близька до інерціальної геліоцентрична система відліку, початок координат якої збігається з центром Сонця, а осі напрямлені на «нерухомі» зірки. Для більшості технічних задач в якості інерціальної може бути прийнята система відліку, жорстко пов'язана із Землею.

Другий закон (основний закон динаміки). *В інерціальній системі відліку добуток маси матеріальної точки на прискорення, яке вона отримує під дією сили, дорівнює цій силі:*

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (1.1)$$

Третій закон (закон рівності дії і протидії). *Сили взаємодії двох матеріальних точок рівні за модулем і напрямлені по одній прямій в протилежні боки.*

Цей закон справедливий як для задач статки, так і для задач динаміки.

Четвертий закон (закон паралелограма сил). Система сил, що діє на матеріальну точку, еквівалентна одній силі, яка дорівнює геометричній сумі всіх сил системи.

Цей закон є таким же універсальним, як і попередній. Таким чином, діюча на матеріальну точку система сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ еквівалентна \vec{R} , де

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k,$$

звідки, використовуючи (1.1), отримаємо

$$m\vec{a} = \vec{R}$$

або

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (1.2)$$

Дане рівняння називають *основним рівнянням динаміки матеріальної точки*.

1.2. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

Розглянемо радіус-вектор \vec{r} , що визначає положення матеріальної точки в інерціальній системі відліку, і знайдемо прискорення

точки $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, тоді рівняння (1.2) набирає вигляду:

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (1.3)$$

Рівність (1.3) являє собою диференціальне рівняння руху матеріальної точки у векторній формі. Воно еквівалентне трьом скалярним рівнянням, залежним від вибору координатних осей, на які проектується основне рівняння динаміки (1.2). Спроектуємо це рівняння на осі нерухомої декартової системи координат, враховуючи, що проекції прискорення $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$, і отримаємо:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz}, \quad (1.4)$$

де x, y, z – декартові координати точки.

При використанні натуральної форми опису руху точки спроектуємо рівняння (1.2) на осі натурального тригранника. З кінематики відомі вирази для проекцій прискорення точки на дотичну τ , нормаль n і бинормаль b :

$$a_\tau = \ddot{S}; \quad a_n = \frac{\dot{S}^z}{\rho}; \quad a_b = 0,$$

враховуючи які, отримаємо:

$$m\ddot{S} = \sum_{k=1}^n F_{k\tau}; \quad m \frac{\dot{S}^z}{\rho} = \sum_{k=1}^n F_{kn}; \quad 0 = \sum_{k=1}^n F_{kb}, \quad (1.5)$$

де $S = S(t)$ – закон руху точки по траєкторії; ρ – радіус кривизни траєкторії в поточній точці. З останнього рівняння (1.5) випливає, що рівнодійна сил, прикладених до точки, лежить в дотичній площині πn .

При розв'язанні першої задачі динаміки, коли закон руху точки відомий, беручи похідні, можна визначити ліві частини рівнянь руху (1.4) або (1.5). У цьому випадку одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь щодо невідомих сил.

При розв'язанні другої задачі динаміки відомі сили, що діють на матеріальну точку, тобто праві частини рівнянь (1.4) або (1.5), які в даному випадку є диференціальними рівняннями відносно декартових або натуральної координат точки. Інтегрування цих рівнянь дозволяє визначити закон руху точки.

Приклад. Матеріальна точка M масою m рухається під дією сили ваги в середовищі без опору. У початковий момент вона перебувала на висоті h над поверхнею Землі і мала горизонтально напрямлену швидкість \vec{v}_0 .

Визначити відстань L , яку пройде точка в горизонтальному напрямку до моменту торкання поверхні Землі.

Введемо нерухому декартову систему координат, у якій вісь x напрямлена горизонтально і паралельна початковій швидкості \vec{v}_0 , а вісь y вертикальна і проходить через початкове положення точки M_0 (рис. 1.1). Очевидно, що рух точки буде відбуватися у вертикальній площині xOy , тому третю координатну вісь вводити не будемо. На точку діє сила ваги $\vec{G} = m\vec{g}$, проекції якої на координатні осі $G_x = 0$ і $G_y = -mg$. Диференціальні рівняння руху (1.4) мають вигляд:

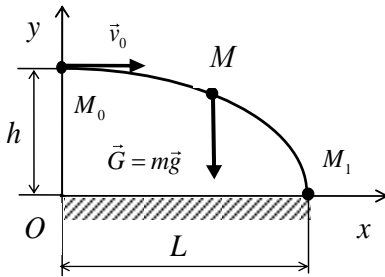


Рисунок 1.1

$$m\ddot{x}=0; \quad m\ddot{y}=-mg$$

або

$$\ddot{x}=0; \quad \ddot{y}=-g.$$

Проінтегруємо ці рівняння:

$$\dot{x}=C_1; \quad x=C_1t+C_2; \quad (1.6)$$

$$\dot{y}=-gt+C_3; \quad y=-g\frac{t^2}{2}+C_3t+C_4$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, \dots, C_4 використаємо початкові умови:

$$\text{при } t=0 \quad x_0=0; \quad y_0=h; \quad \dot{x}_0=v_0; \quad \dot{y}_0=0. \quad (1.7)$$

З рівнянь (1.6) отримаємо:

$$\dot{x}|_{t=0}=C_1=\dot{x}_0; \quad C_1=v_0;$$

$$x|_{t=0}=C_2=x_0; \quad C_2=0;$$

$$\dot{y}|_{t=0}=C_3=\dot{y}_0; \quad C_3=0;$$

$$y|_{t=0}=C_4=y_0; \quad C_4=h.$$

Підставимо сталі інтегрування C_1, \dots, C_4 в систему рівнянь (1.6) і знайдемо залежності проекцій швидкості v_x, v_y і координат x, y точки від часу:

$$v_x=\dot{x}=v_0; \quad x=v_0t;$$

$$v_y=\dot{y}=-gt; \quad y=-\frac{gt^2}{2}+h.$$

У момент торкання поверхні Землі координата точки $y=0$, тому час польоту t_1 визначимо з рівняння

$$y|_{t=t_1}=0 \quad \text{або} \quad 0=-\frac{gt_1^2}{2}+h,$$

звідки отримаємо $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Тепер визначимо відстань L , тобто горизонтальну дальність польоту точки:

$$L = x_{|t=t_1} = v_0 t_1 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Питання для самоконтролю

1. Що вивчає динаміка?
2. Як сформулювати першу і другу основні задачі динаміки?
3. Як можна визначити матеріальну точку?
4. Як сформулювати закони динаміки Галілея – Ньютона?
5. Яку систему відліку називають інерціальною?
6. Як записати основне рівняння динаміки матеріальної точки?

Лекція 2. КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

2.1. Класифікація сил, що діють на матеріальну точку

Дослідження коливань матеріальної точки, з одного боку, є прикладом використання диференціальних рівнянь її руху. З іншого боку, коливання настільки поширені в природі і техніці, що вивчення їх закономірностей має самостійне значення. Це значення підсилюється тим, що різні за своєю фізичною природою коливальні явища мають однаковий математичний опис.

Серед сил, що діють на матеріальну точку, особливе місце займають *відновлюючі сили*, які намагаються повернути точку в положення рівноваги. Вони залежать від величини відхилення точки від положення рівноваги і напрямлені в бік, протилежний відхиленню. Саме ці сили надають руху точки коливальний характер.

На рис. 2.1, 2.2 наведені приклади, в першому з яких відновлюючою є сила пружності \vec{F} деформованої пружини, а у другому – рівнодійна сили ваги \vec{G} і архімедової сили \vec{Q} : $\vec{F} = \vec{G} + \vec{Q}$. В обох випадках координата x відлічується від положення рівноваги тіла. Розглянуті тіла рухаються поступально, тому рух кожного з них еквівалентний руху матеріальної точки.

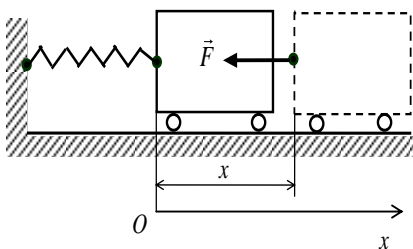


Рисунок 2.1

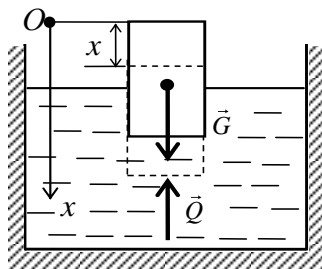


Рисунок 2.2

На рухомі тіла зазвичай діють ще й *сили опору*, що залежать від швидкості руху. Це сили тертя ковзання, сили опору середовища та інші. Крім того, можуть також діяти *збурюючі сили*, що є заданими функціями часу.

Надалі будемо розглядати прямолінійні коливання матеріальної точки. При цьому відновлюючі сили будемо вважати пропорційними величині відхилення точки від положення рівноваги, а сили опо-

ру – пропорційними швидкості точки. При виконанні цих умов диференціальні рівняння руху точки є лінійними, а самі коливання називаються лінійними коливаннями.

2.2. Диференціальне рівняння прямолінійних коливань матеріальної точки

Нехай точка M масою m притягується до точки O силою \vec{F} , пропорційною відстані OM , а початкова швидкість точки напрямлена вздовж прямої OM або дорівнює нулю (рис. 2.3). У цьому випадку точка M рухається прямолінійно, а її положення визначається однією

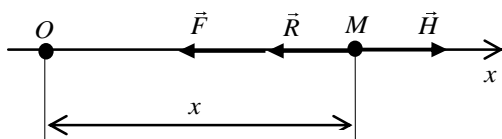


Рисунок 2.3

координатою x , що відлічується від положення рівноваги (точки O). Проекція відновлюючої сили \vec{F} на вісь x : $F_x = -cx$, де c – коефі-

цієнт пропорційності, $c > 0$.

Нехай на точку M діє також сила опору \vec{R} , пропорційна швидкості цієї точки і напрямлена протилежно їй. Проекція сили на вісь x : $R_x = -\beta\dot{x}$, де β – коефіцієнт пропорційності, $\beta > 0$. Крім того, на точку M діє гармонійна збуджуюча сила \vec{H} , напрямлена уздовж прямолінійної траєкторії точки. Проекція цієї сили на вісь x : $H_x = H_0 \sin pt$, де H_0 – амплітуда збуджуючої сили, $H_0 > 0$; p – її частота.

Запишемо диференціальне рівняння руху точки M :

$$m\ddot{x} = F_x + R_x + H_x$$

або

$$m\ddot{x} = -cx - \beta\dot{x} + H_0 \sin pt.$$

Розділимо обидві частини цього рівняння на m , введемо позначення

$$\frac{c}{m} = k^2; \quad \frac{\beta}{m} = 2n; \quad \frac{H_0}{m} = h$$

і одержимо рівняння

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin pt, \quad (2.1)$$

яке є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням із сталими коефіцієнтами.

2.3. Вільні коливання в середовищі без опору

Розглянемо коливання матеріальної точки, що відбуваються під дією однієї відновлюючої сили \vec{F} . Такі коливання називають *вільними* і описують однорідним диференціальним рівнянням, яке можна отримати з рівняння (2.1), поклавши $n = 0$ і $h = 0$:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (2.2)$$

Характеристичне рівняння цього диференціального рівняння $\lambda^2 + k^2 = 0$ має суто уявні корені $\lambda_{1,2} = \pm ki$, тому загальний розв'язок рівняння (2.2) запишемо у вигляді:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (2.3)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов:

$$x|_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0. \quad (2.4)$$

Продиференціюємо функцію (2.3):

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (2.5)$$

Скориставшись (2.3)–(2.5), отримаємо

$$x|_{t=0} = C_1 = x_0; \quad \dot{x}|_{t=0} = C_2 k = \dot{x}_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}.$$

Підставивши C_1 і C_2 в рівняння (2.3), запишемо закон руху точки

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt \quad (2.6)$$

і перетворимо його до більш зручного вигляду. Ввівши позначення

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}; \quad \sin \varphi_0 = \frac{x_0}{A}; \quad \cos \varphi_0 = \frac{\dot{x}_0}{kA}, \quad (2.7)$$

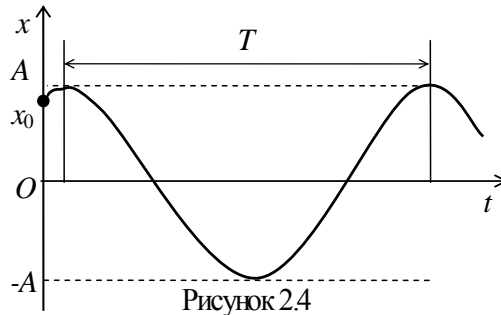
з рівняння (2.6) отримаємо:

$$x = A \left(\frac{x_0}{A} \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{kA} \sin kt \right) = A (\sin \varphi_0 \cos kt + \cos \varphi_0 \sin kt)$$

або

$$x = A \sin(kt + \varphi_0). \quad (2.8)$$

Таким чином, вільні коливання матеріальної точки в середовищі без опору є гармонійними. Амплітуда цих коливань дорівнює A , фаза $\varphi = kt + \varphi_0$, де φ_0 – початкова фаза. Величину $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ називають *круговою* або *циклічною частотою* коливань. Період коливань $T = 2\pi/k$ є періодом функції $\sin(kt + \varphi_0)$. Останнє співвідношення показує, що кругова частота k дорівнює числу повних коливань точки за 2π секунд: $k = 2\pi/T$. Таким чином, частота і період гармонійних коливань залежать від маси точки і коефіцієнта пропорційності відновлюючої сили, але не залежать від початкових умов. Цю властивість вільних коливань називають *ізохронністю*. Амплітуда і початкова фаза залежать як від параметрів системи m і c , так і від початкових умов. Графік вільних незгасаючих коливань (2.8) наведено на рис. 2.4.



Приклад. Складемо диференціальне рівняння руху вантажу M масою m , підвішеного на невагомій пружині жорсткістю c (рис. 2.5). Вантаж M , що приймається за матеріальну точку, здійснює прямолінійні коливання вздовж вертикальної осі x . На нього діють сила ваги $m\vec{g}$ і сила пружності \vec{F} .

Позначимо через O_1 положення вантажу при недеформованій пружині, а через O – положення статичної рівноваги вантажу, від якого будемо відлічувати поточну координату x , $\delta_{ст}$ – статична деформація

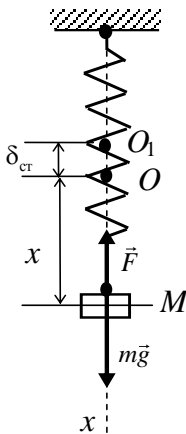


Рисунок 2.5

пружины. Її поточна деформація дорівнює $(\delta_{\text{ст}} + x)$, проекція сили пружності, що підлягає закону Гука, $F_x = -c(\delta_{\text{ст}} + x)$. Диференціальне рівняння руху вантажу має вигляд:

$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{\text{ст}} + x). \quad (2.9)$$

В положенні рівноваги сила ваги зрівноважена силою пружності, яка в цьому положенні дорівнює $c\delta_{\text{ст}}$, тобто

$$mg - c\delta_{\text{ст}} = 0. \quad (2.10)$$

Враховуючи (2.10), перепишемо рівняння (2.9) у вигляді:

$$m\ddot{x} = -cx \quad \text{або} \quad \ddot{x} + k^2x = 0,$$

де $k^2 = \frac{c}{m} = \frac{g}{\delta_{\text{ст}}}$. Отримане рівняння збігається з рівнянням (2.2), тому

вантаж здійснює гармонійні коливання, частота і період яких повністю визначаються величиною статичної деформації пружини

$$k = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{ст}}}}; \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{\text{ст}}}{g}}.$$

Якщо вибрати початок відліку координати x в точці O_1 , то $F_x = -cx$ і диференціальне рівняння руху вантажу буде мати вигляд:

$$m\ddot{x} = mg - cx \quad \text{або} \quad \ddot{x} + k^2x = g,$$

тобто стане неоднорідним.

Таким чином, вибір початку відліку координати в положенні статичної рівноваги дозволяє отримати найбільш просту форму диференціального рівняння руху, що справедливо і для інших випадків коливального руху.

2.4. Вільні коливання при наявності в'язкого опору

Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки під дією відновлюючої сили і сили опору. Диференціальне рівняння такого руху отримаємо з рівняння (2.1) при $h = 0$:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0. \quad (2.11)$$

Його характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$ має корені

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (2.12)$$

Характер руху точки істотно залежить від співвідношення величин n і k . Розглянемо три можливі випадки цього співвідношення.

Випадок малого опору ($n < k$)

Корені характеристичного рівняння (2.12) комплексно-спряжені: $\lambda_{1,2} = -n \pm k_1 i$, де $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. Загальний розв'язок диференціального рівняння (2.11) має вигляд:

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \quad (2.13)$$

де сталі інтегрування C_1 і C_2 визначаються з початкових умов.

Введемо нові сталі A і φ_0 за допомогою співвідношень

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \sin \varphi_0 = \frac{C_1}{A}; \quad \cos \varphi_0 = \frac{C_2}{A},$$

тоді з рівняння (2.13) отримаємо:

$$x = A e^{-nt} \sin(k_1 t + \varphi_0). \quad (2.14)$$

Це рівняння описує згасаючі коливання, графік яких наведено на рис. 2.6. Вони не є періодичними, але проміжок часу між двома послідовними максимальними відхиленнями точки від положення рівноваги в один і той же бік залишається незмінним. Цю величину умовно називають *періодом згасаючих коливань*: $T_1 = 2\pi/k_1$, де k_1 – частота згасаючих коливань.

Швидкість згасання коливань характеризується відношенням величин двох послідовних максимальних відхилень точки від положення рівноваги в один і той же бік:

$$\delta = \frac{x(t_1)}{x(t_1 + T_1)} = \frac{Ae^{-nt_1}}{Ae^{-n(t_1 + T_1)}} = e^{nT_1},$$

яке називають *декрементом коливань*. Використовують також натуральний логарифм цієї величини $\Delta = \ln \delta = nT_1$, що має назву *логарифмічний декремент коливань*. Оскільки частота згасаючих коливань k_1 менше частоти незгасаючих коливань k , поява сили опору призводить до збільшення періоду коливань: $T_1 > T$. Ця зміна може бути досить незначною і тому основним впливом, який має сила опору на вільні коливання, є якісна зміна характеру коливань, які стають згасаючими.

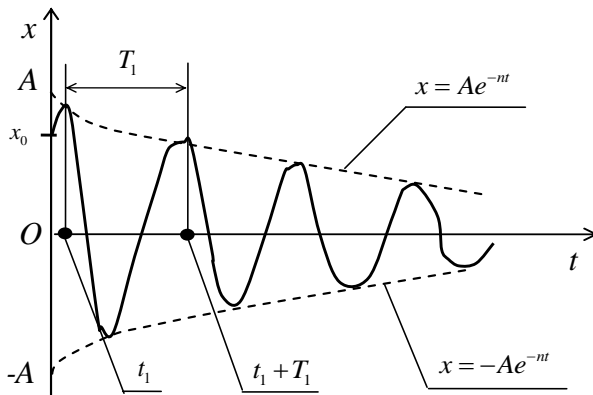


Рисунок 2.6

Випадок критичного опору ($n = k$)

Корені характеристичного рівняння (2.12) дійсні, рівні і від'ємні $\lambda_1 = \lambda_2 = -n$, а загальний розв'язок диференціального рівняння (2.11) має вигляд:

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t). \quad (2.15)$$

Випадок великого опору ($n \gg k$)

Корені характеристичного рівняння (2.12) дійсні, від'ємні і різні, а загальний розв'язок диференціального рівняння (2.11) має вигляд:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2.16)$$

У двох останніх випадках рух точки втрачає коливальний характер і стає аперіодичним. Залежно від величини і напрямку початкової швидкості графік коливань має вигляд однієї з трьох кривих, наведених на рис. 2.7.

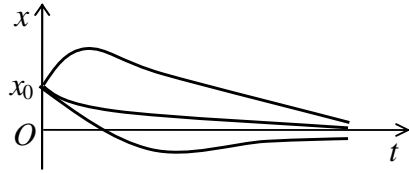


Рисунок 2.7

2.5. Змушені коливання. Загальний випадок

Коливання, які здійснює матеріальна точка під дією відновлюючої сили, сили опору і збудовуючої сили, називають *змушеними*. Вони описуються неоднорідним диференціальним рівнянням (2.1), яке має загальний розв'язок

$$x = x_1 + x_2, \quad (2.17)$$

де x_1 — загальний розв'язок однорідного рівняння (2.11); x_2 — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2.1).

Як вже було показано, при будь-яких співвідношеннях n і k загальний розв'язок рівняння (2.11) є згасаючим, про що свідчать вирази (2.13), (2.15) і (2.16). Тому через досить великий проміжок часу після початку руху у розв'язку (2.17) залишається тільки доданок x_2 , який будемо шукати у вигляді:

$$x_2 = A_2 \sin(pt - \varepsilon). \quad (2.18)$$

Визначимо похідні:

$$\dot{x}_2 = A_2 p \cos(pt - \varepsilon); \quad \ddot{x}_2 = -A_2 p^2 \sin(pt - \varepsilon), \quad (2.19)$$

потім перетворимо праву частину рівняння (2.1):

$$h \sin pt = h \sin(pt - \varepsilon + \varepsilon) = h \sin(pt - \varepsilon) \cos \varepsilon + h \cos(pt - \varepsilon) \sin \varepsilon$$

і підставимо в нього вирази (2.18) і (2.19):

$$\begin{aligned} -A_2 p^2 \sin(pt - \varepsilon) + 2nA_2 p \cos(pt - \varepsilon) + k^2 A_2 \sin(pt - \varepsilon) = \\ = h \sin(pt - \varepsilon) \cos \varepsilon + h \cos(pt - \varepsilon) \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Для того щоб отримана рівність виконувалася тотожно, прирівняємо коефіцієнти при $\sin(pt - \varepsilon)$ і $\cos(pt - \varepsilon)$ в лівій і правій його частинах:

$$A_2(k^2 - p^2) = h \cos \varepsilon; \quad 2npA_2 = h \sin \varepsilon \quad \text{і знайдемо:}$$

$$A_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (2.20)$$

Оскільки $A_2 > 0$, $\varepsilon \in [0, \pi]$ і повністю визначається своїм тангенсом.

Таким чином, рівняння змущених коливань має вигляд:

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt - \varepsilon). \quad (2.21)$$

З нього випливає, що змущені коливання є незгасаючими, а їх частота і період дорівнюють частоті та періоду збурюючої сили.

Перетворимо вираз для амплітуди змущених коливань:

$$A_2 = \frac{\frac{h}{k^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{k}\right)^2 \cdot \left(\frac{p}{k}\right)^2}}. \quad (2.22)$$

Відношення частоти збурюючої сили p до частоти вільних гармонійних коливань k називають *коефіцієнтом розладу*. Прийнемо позначення:

$$z = \frac{p}{k}; \quad b = \frac{n}{k}; \quad A_0 = \frac{h}{k^2} = \frac{H_0 m}{mc} = \frac{H_0}{c},$$

де A_0 – статичне відхилення точки від положення рівноваги під дією сталої сили H_0 . Введемо в розгляд коефіцієнт динамічності η , що

дорівнює відношенню амплітуди змушених коливань A_2 до величини статичного відхилення A_0 ,

$$\eta = \frac{A_2}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4b^2 z^2}}. \quad (2.23)$$

Цей коефіцієнт залежить від двох параметрів, що показано на рис. 2.8, де наведені криві залежності коефіцієнта динамічності η від коефіцієнта розладу z для різних значень безрозмірного коефіцієнта в'язкості b .

Визначимо екстремум підкореневого виразу знаменника формули (2.23):

$$y = (1-z^2)^2 + 4b^2 z^2, \quad (2.24)$$

для чого прирівнюємо нулю похідну:

$$y' = \frac{dy}{dz} = 2(1-z^2)(-2z) + 8b^2 z = 0. \quad (2.25)$$

Невід'ємні корені цього рівняння: $z_1 = 0$; $z_2 = \sqrt{1-2b^2}$. Корінь $z_2 < 1$ і залишається дійсним, якщо $1-2b^2 \geq 0$ або $b \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Визначимо другу похідну функції (2.24):

$$y'' = \frac{d^2 y}{dz^2} = 12z^2 - 4 + 8b^2.$$

При $z = z_2$ і $b < \frac{\sqrt{2}}{2}$ отримаємо $y'' = 12(1-2b^2) - 4 + 8b^2 = 8 - 16b^2 > 0$, а при $z = z_1 = 0$ і $b < \frac{\sqrt{2}}{2}$ отримаємо $y'' = +8b^2 - 4 < 0$, тобто функція y має мінімум при $z = z_2$ і максимум – при $z = z_1$, а коефіцієнт динамічності має максимум при $z = z_2$ і мінімум – при $z = z_1$. Підставимо значення z_1 і z_2 у формулу (2.23), тоді

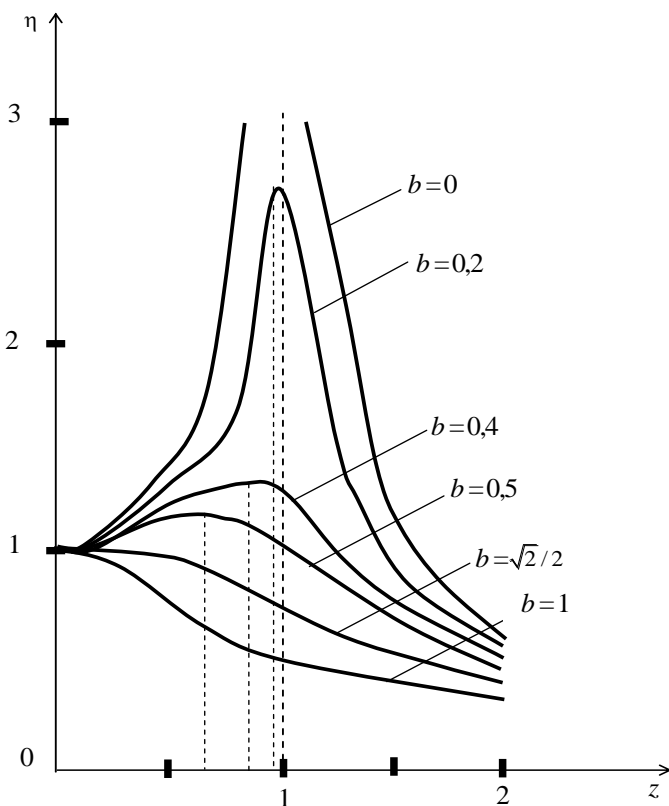


Рисунок 2.8

$$\eta|_{z=z_1=0} = 1; \quad \eta_{\max} = \eta|_{z=z_2} = \frac{1}{2b\sqrt{1-b^2}}, \quad (2.26)$$

де η_{\max} – максимальне значення коефіцієнта динамічності при заданому b , при $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ маємо $\eta_{\max} = 1$.

Таким чином, як видно з рис. 2.8, при малих значеннях b , тобто $b < \frac{\sqrt{2}}{2}$, і $z = \sqrt{1-2b^2}$ відбувається різке збільшення коефіцієнта дина-

мічності η і, отже, амплітуди змушених коливань A_2 . Зі збільшенням коефіцієнта b , тобто з ростом опору середовища, максимуми амплітуди зменшуються і зсуваються вліво.

При $b > \frac{\sqrt{2}}{2}$ рівняння (2.25) має тільки один дійсний корінь $z_1 = 0$, при якому $y'' = 8b^2 - 4 > 0$, тобто функція y має мінімум, а коефіцієнт динамічності η – максимум.

Фаза змушених коливань $(pt - \varepsilon)$ відстає від фази збудовуючої сили pt на величину ε , яку називають *зсувом фаз*. З формули (2.20) отримаємо:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2 \left(\frac{n}{k} \right) \cdot \left(\frac{p}{k} \right)}{1 - \left(\frac{p}{k} \right)^2} = \frac{2bz}{1 - z^2}. \quad (2.27)$$

Криві залежності зсуву фаз ε від коефіцієнта розладу z для різних значень коефіцієнта b наведені на рис. 2.9. При $z = 1$ зсув фаз дорівнює $\pi/2$ при будь-яких значеннях b , при подальшому зростанні z зсув фаз наближається до π .

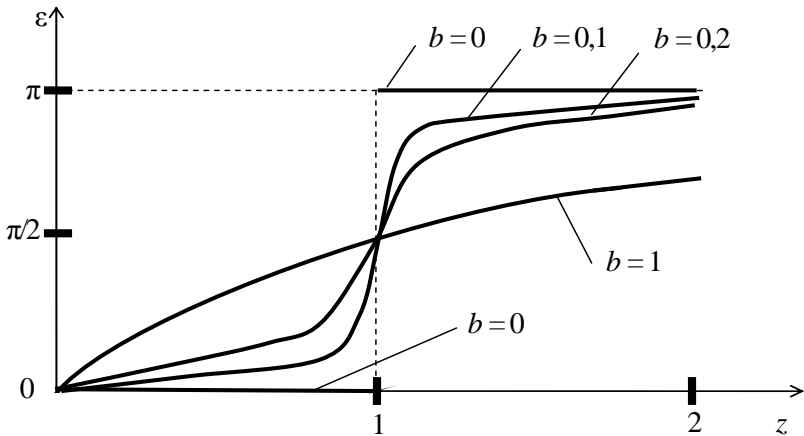


Рисунок 2.9

2.6. Змуснені коливання в середовищі без опору

У разі відсутності опору ($n = 0$) при $p \neq k$ з формули (2.20) отримаємо, що $A_2 = \frac{h}{k^2 - p^2}$; $\operatorname{tg} \varepsilon = 0$, і рівняння змуснених коливань має вигляд:

$$x_2 = A_2 \sin pt = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt, \quad (2.28)$$

а коефіцієнт динамічності

$$\eta = \frac{|A_2|}{A_0} = \frac{1}{|1 - z^2|} \quad (2.29)$$

буде мати розрив 2-го роду при $z = 1$ (це крива на рис. 2.8 при $b = 0$). Якщо $p < k$ ($z < 1$), то $A_2 > 0$ і фаза змуснених коливань збігається з фазою збурюючої сили. Якщо $p > k$ ($z > 1$), то $A_2 < 0$ і

$$x_2 = -|A_2| \sin pt = |A_2| \sin(pt - \pi),$$

тобто зсув фаз $\varepsilon = \pi$ (крива на рис. 2.9 при $b = 0$).

У разі збігу частоти збурюючої сили p і частоти вільних гармонійних коливань k , що зветься *власною частотою*, виникає явище резонансу. Тоді частинний розв'язок диференціального рівняння

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, \quad (2.30)$$

яке можна отримати з рівняння (2.1) при $n = 0$, будемо шукати у вигляді:

$$x_2 = A_2 t \cos pt. \quad (2.31)$$

Визначимо похідні:

$$\dot{x}_2 = A_2 \cos pt - A_2 p t \sin pt;$$

$$\ddot{x}_2 = -A_2 p \sin pt - A_2 p \sin pt - A_2 p^2 t \cos pt. \quad (2.32)$$

Підставимо (2.31) і (2.32) в рівняння (2.30):

$$-2A_2 p \sin pt - A_2 p^2 t \cos pt + k^2 A_2 t \cos pt = h \sin pt.$$

Врахуємо, що $p = k$, тоді $-2A_2 p \sin pt = h \sin pt$, звідки отримаємо:

$$A_2 = -\frac{h}{2p};$$

$$x_2 = -\frac{h}{2p} t \cos pt. \quad (2.33)$$

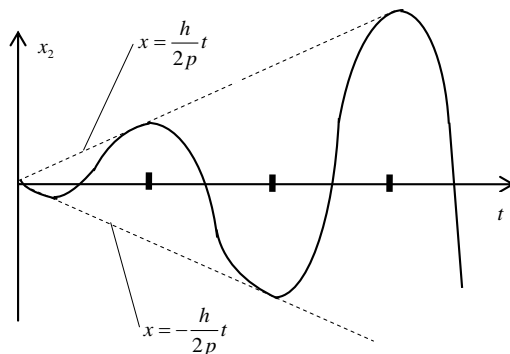


Рисунок 2.10

Таким чином, при резонансі виникають коливання з частотою $p = k$, розмахи яких з плином часу зростають необмежено, причому збільшення розмахів пропорційно часу. Графік таких коливань наведено на рис. 2.10.

Питання для самоконтролю

1. Під дією яких сил матеріальна точка здійснює коливання?
2. Які коливання матеріальної точки називають вільними?
3. У чому полягає властивість ізохронності вільних коливань?
4. Який вплив малого опору на вільні коливання матеріальної точки?
5. Які умови неколивального руху матеріальної точки?
6. Чому дорівнюють частота і період змушених коливань?
7. Чому дорівнює коефіцієнт динамічності?
8. Які залежності коефіцієнта динамічності від частоти збудовуючої сили і опору середовища?
9. У чому полягає явище резонансу і які його умови?

Лекція 3. ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

3.1. Рівняння відносного руху

Два перших закона динаміки і всі співвідношення, отримані з них, в тому числі і основне рівняння динаміки

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad (3.1)$$

справедливі тільки при русі точки відносно інерціальної системи відліку.

Розглянемо рух точки M відносно неінерціальної системи відліку (рис. 3.1). Нехай система $O_1x_1y_1z_1$ є інерціальною (надалі будемо

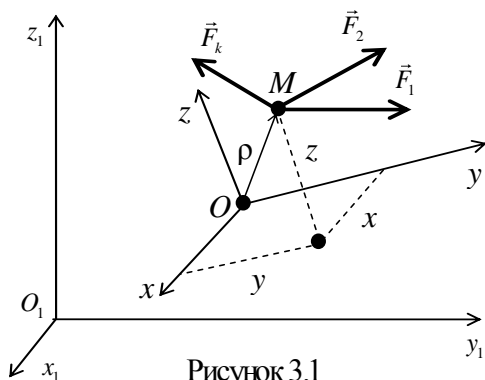


Рисунок 3.1

називати її *нерухомою*), а система $Oxyz$ рухається відносно нерухомої системи відліку і є неінерціальною. Будемо також вважати, що переносний рух системи $Oxyz$ і сили, що діють на точку M відомі. Скористаємося теоремою Коріоліса, відповідно до якої абсолютне

прискорення точки \vec{a} дорівнює геометричній сумі відносного \vec{a}_r , переносного \vec{a}_e та коріолісова \vec{a}_c прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \quad (3.2)$$

Підставляючи (3.2) в рівняння (3.1), отримаємо:

$$m\vec{a}_r + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$$

або

$$m\vec{a}_r = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c). \quad (3.3)$$

Введемо вектори

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e, \quad \vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c, \quad (3.4)$$

що звуться *переносною* і *коріолісовою* силами інерції, тоді рівняння (3.3) набирає вигляду:

$$m\vec{a}_r = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c. \quad (3.5)$$

Воно являє собою основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки. Таким чином, якщо до сил, діючих на матеріальну точку, умовно приєднати переносну і коріолісову сили інерції, то рівняння відносного руху точки (3.5) збереже форму основного рівняння динаміки (3.1).

Для визначення сил інерції необхідно знайти відповідні прискорення точки. Skorистаємося відомими з кінематики співвідношеннями. Переносне прискорення представимо як абсолютне прискорення точки, незмінно пов'язаної з рухомою системою відліку:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_o + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}),$$

де \vec{a}_o – прискорення початку координат рухомої системи; $\vec{\varepsilon}, \vec{\omega}$ – кутове прискорення і кутова швидкість рухомої системи; $\vec{\rho}$ – радіус-вектор точки в рухомій системі координат. Коріолісове прискорення $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$, де \vec{v}_r – відносна швидкість точки. Як впливає з виразів (3.4), сили інерції $\vec{\Phi}_e, \vec{\Phi}_c$ напрямлені протилежно прискоренням \vec{a}_e, \vec{a}_c .

Зіставлення рівнянь (3.1) і (3.5) показує, що в інерціальній системі відліку прискорення матеріальної точки є лише результатом дії на неї сил, тобто взаємодії з іншими тілами. В неінерційній системі відліку прискорення матеріальної точки залежить як від діючих на неї сил, так і від руху самої системи відліку.

Спроекуємо векторне рівняння (3.5) на осі рухомої системи Ox_{uz} і отримаємо диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= \sum_{k=1}^n F_{kx} + \Phi_{ex} + \Phi_{cx} ; \\
 m\ddot{y} &= \sum_{k=1}^n F_{ky} + \Phi_{ey} + \Phi_{cy} ; \\
 m\ddot{z} &= \sum_{k=1}^n F_{kz} + \Phi_{ez} + \Phi_{cz} ,
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

де \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} – проекції відносного прискорення на осі рухомої системи.

Розглянемо як приклад використання рівнянь відносного руху явище розмиву берегів рік. Як відомо, в північній півкулі праві береги рік, що течуть вздовж меридіана, звичайно обривисті, а ліві – пологі. Для пояснення цього явища візьмемо деякий об'єм води M , обмежений двома перерізами ріки, що тече з півдня на північ (рис. 3.2). На цей об'єм діє сила тяжіння Землі \vec{G}_0 , реакція дна \vec{N} і реакція берега \vec{F} .

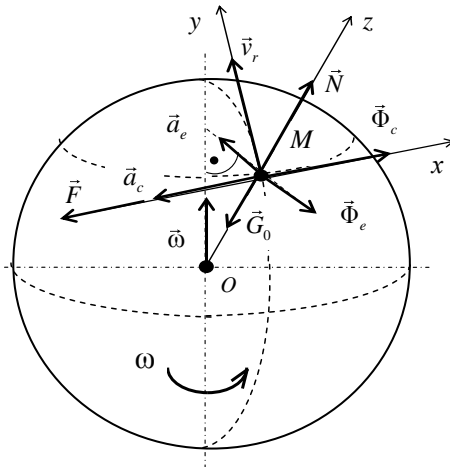


Рисунок 3.2

Для запису рівняння руху в неінерціальній системі відліку, що пов'язана з Землею, введемо переносну $\vec{\Phi}_e$ і коріолісову $\vec{\Phi}_c$ сили інерції. Переносне прискорення \vec{a}_e напрямлене до осі обертання Землі, тому що Земля обертається рівномірно з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, а переносна сила інерції – в протилежний бік. Коріолісове прискорення $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ напрямлене на захід, а коріолісова сила інерції – на схід.

Рівняння відносного руху має вигляд:

$$m\vec{a}_r = \vec{G}_0 + \vec{N} + \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c .$$

Спроектуємо його на вісь Mx , напрямлену на схід уздовж дотичної до паралелі, враховуючи, що відносне прискорення лежить в площині меридіана, і отримаємо $\Phi_c - F = 0$ або $F = \Phi_c$. Таким чином, реакція берега дійсно напрямлена вліво, якщо дивитися за течією ріки. Отже,

сила тиску води, згідно з третім законом динаміки, діє протилежно, тобто на правий берег, поступово його розмиваючи. Це правило не змінюється і для рік, що течуть з півночі на південь. У південній півкулі, навпаки, розмиваються ліві береги рік.

3.2. Принцип відносності класичної механіки

Припустимо, що рухома система відліку рухається поступально, рівномірно і прямолінійно. При цьому кутова швидкість $\vec{\omega}$ і кутове прискорення $\vec{\epsilon}$ рухомої системи координат, а також прискорення її початку \vec{a}_o дорівнюють нулю. Отже, дорівнюють нулю переносне \vec{a}_e , коріолісове \vec{a}_c прискорення і обидві сили інерції \vec{F}_e , \vec{F}_c . Тепер рівняння (3.5) набирає вигляду:

$$m\vec{a}_r = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (3.7)$$

Порівнюючи рівняння (3.1) і (3.7), приходимо до висновку про те, що в розглянутому випадку останнє рівняння, що визначає відносне прискорення матеріальної точки, збігається з основним рівнянням динаміки (3.1), що визначає її абсолютне прискорення. Таким чином, рух матеріальної точки відносно системи відліку, що рухається поступально, рівномірно і прямолінійно, відбувається так само, як і відносно нерухомої системи відліку, тобто рухома система є інерціальною.

Дійсно, якщо права частина рівняння (3.7) дорівнює нулю, то з нього отримаємо $\vec{a}_r = 0$, звідки випливає, що точка рухається рівномірно і прямолінійно, тобто виконується перший закон динаміки. Але закони динаміки однакові у всіх інерціальних системах відліку, тому ніякі механічні експерименти, проведені в інерціальній системі відліку, не можуть виявити, знаходиться вона в спокої або рухається поступально, рівномірно і прямолінійно. У цьому полягає відкритий Галілеєм принцип відносності класичної механіки.

3.3. Умови відносного спокою. Сила ваги

Нехай матеріальна точка під дією прикладених до неї сил перебуває в стані відносного спокою, тобто не рухається відносно рухомої системи відліку $Oxuz$. У цьому випадку відносна швидкість \vec{v}_r і віднос-

не прискорення \vec{a}_r точки дорівнюють нулю, отже, дорівнює нулю і коріолісова сила інерції $\vec{\Phi}_e$. Рівняння відносного спокою отримаємо з рівняння (3.5):

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \vec{\Phi}_e = 0. \quad (3.8)$$

Таким чином, якщо матеріальна точка знаходиться в стані відносного спокою, геометрична сума діючих на неї сил і переносної сили інерції дорівнює нулю. Слід зазначити, що виконання умови (3.8) не означає, що після надання точці початкової швидкості вона буде рухатися рівномірно і прямолінійно відносно рухомої системи, як це має місце в інерціальній системі відліку. Дійсно, при появі відносної швидкості, по-перше, виникає коріолісове прискорення \vec{a}_e і коріолісова сила інерції $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$, по-друге, може змінитися переносне прискорення, залежне від положення точки в рухомій системі відліку, що призведе до зміни переносної сили інерції $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$. Таким чином, права частина рівняння (3.5) не буде дорівнювати нулю, і точка буде мати відносне прискорення $\vec{a}_r \neq 0$.

Розглянемо як приклад матеріальну точку M , що підвішена на нитці і знаходиться в спокої відносно Землі (рис. 3.3). Запишемо умову відносного спокою (3.8) і отримаємо:

$$\vec{T} + \vec{G}_0 + \vec{\Phi}_e = 0, \quad (3.9)$$

де \vec{T} – реакція нитки; \vec{G}_0 – сила тяжіння Землі, напрямлена до її центру; $\vec{\Phi}_e$ – переносна сила інерції, яка внаслідок рівномірного обертання Землі має тільки відцентрову складову, напрямлену від її осі обертання. Модуль сили інерції

$$\Phi_e = ma_e = m\rho\omega^2 = mR\omega^2 \cos \varphi,$$

де $\rho = MK$ – радіус географічної паралелі; R – радіус Землі; ω – кутова швидкість обертання Землі; φ – геоцентрична широта. Силу, рівну по модулю і напрямлену протилежно реакції \vec{T} , називають силою ваги і позначають через $m\vec{g}$. Таким чином, сила ваги дорівнює геометричній сумі сили тяжіння \vec{G}_0 і сили інерції $\vec{\Phi}_e$, викликаній обертанням Землі:

$$m\vec{g} = \vec{G}_0 + \vec{\Phi}_e.$$

Напрямок сили ваги $m\vec{g}$ визначає напрям вертикалі в даній точці земної поверхні, а площина, перпендикулярна силі $m\vec{g}$, є горизонтальною.

Сила інерції $\vec{\Phi}_e$ дуже мала в порівнянні з силою ваги, що видно з відношення їх модулів:

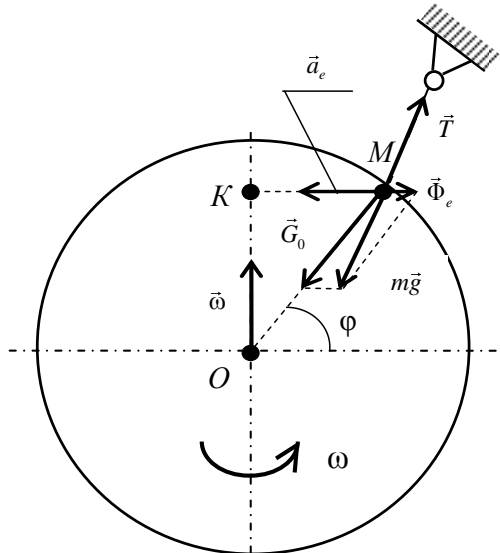


Рисунок 3.3

$$\frac{\Phi_e}{mg} = \frac{mR\omega^2 \cos \varphi}{mg} = \frac{R\omega^2 \cos \varphi}{g}.$$

Це відношення максимальне на екваторі (1/290) і дорівнює нулю на полюсі. Відхилення лінії виска від напрямку радіуса Землі максимальне на широті 45° і становить $6'$. Таким чином, сила ваги $m\vec{g}$ і по модулю, і по напрямку мало відрізняється від сили тяжіння \vec{G}_0 . Прискорення вільного падіння g максимальне на полюсі ($9,83 \text{ м/с}^2$) і мінімальне на екваторі ($9,78 \text{ м/с}^2$).

Приклад. Тіло масою m знаходиться на гладкій похилій грані призми, що рухається по горизонтальній поверхні, як показано на рис.3.4. Кут нахилу грані призми до горизонту дорівнює α .

Визначити:

- 1) Яким має бути прискорення призми, щоб тіло не рухалося відносно неї?
- 2) Чому дорівнює тиск тіла на призму у стані відносного спокою?

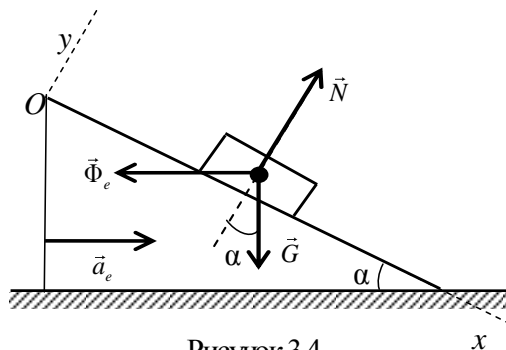


Рисунок 3.4

На тіло діють сила ваги $\vec{G} = m\vec{g}$ і нормальна реакція \vec{N} гладкої площини. Умовно докладемо до тіла переносну силу інерції, модуль якої $\Phi_e = ma_e$, і запишемо для отриманої системи сил рівняння рівноваги

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e = 0.$$

Спроектуємо його на осі x і y рухомої системи координат:

$$G \sin \alpha - \Phi_e \cos \alpha = 0; \quad (3.10)$$

$$N - G \cos \alpha - \Phi_e \sin \alpha = 0. \quad (3.11)$$

Тепер отримаємо:

з рівняння (3.10)

$$mg \sin \alpha - ma_e \cos \alpha = 0, \quad \text{звідки} \quad a_e = g \tan \alpha;$$

з рівняння (3.11)

$$N = mg \cos \alpha + ma_e \sin \alpha = mg \cos \alpha + mgtg\alpha \sin \alpha =$$

$$= mg \left(\cos \alpha + \sin \alpha \cdot tg\alpha \right) = \frac{mg}{\cos \alpha}.$$

Питання для самоконтролю

1. Чому дорівнює переносна сила інерції?
2. Чому дорівнює коріолісова сила інерції?
3. Який вигляд має основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки?
4. Чим пояснити явище розмиву берегів річок, що течуть вздовж меридіана?
5. Як сформулювати принцип відносності класичної механіки?
6. Які умови відносного спокою?
7. Чому дорівнює сила ваги матеріальної точки?
8. Як залежить сила ваги матеріальної точки від географічної широти?

Лекція 4. МЕХАНІЧНА СИСТЕМА. ТВЕРДЕ ТІЛО І ЙОГО МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ

4.1. Маса і центр мас механічної системи

Механічною системою називають будь-яку сукупність матеріальних точок. Зокрема, будь-яке тверде тіло, яке можна розглядати як сукупність його частинок, утворює механічну систему. Маса механічної системи дорівнює сумі мас матеріальних точок, що складають цю систему:

$$m = \sum_{j=1}^N m_j, \quad (4.1)$$

де N – число всіх точок системи.

Центром мас механічної системи називають геометричну точку, радіус-вектор якої \vec{r}_c і декартові координати x_c, y_c, z_c обчислюють так:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j; \quad (4.2)$$

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j x_j; \quad y_c = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j y_j; \quad z_c = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j z_j, \quad (4.3)$$

де \vec{r}_j, x_j, y_j, z_j – радіус-вектор і координати j -ї точки системи.

4.2. Зовнішні і внутрішні сили

Всі сили, що діють на точки механічної системи, можна розділити на зовнішні і внутрішні. *Зовнішніми* називають сили, що діють на точки механічної системи з боку тіл, які не входять до складу даної системи. *Внутрішніми* називають сили взаємодії між матеріальними точками однієї системи. Введемо позначення: зовнішні сили – \vec{F}^e , внутрішні – \vec{F}^i , де індекси e, i – перші літери французьких слів «exterieur» (зовнішній) і «interieur» (внутрішній).

З третього закону динаміки випливає, що для кожної внутрішньої сили існує інша внутрішня сила, рівна їй за модулем і напрямлена уздовж тієї ж прямої в протилежний бік. Таким чином, геометрична сума цих сил, а також сума їх моментів відносно довільної точки

дорівнюють нулю, що дозволяє сформулювати наступні властивості внутрішніх сил:

1) геометрична сума всіх внутрішніх сил (головний вектор) системи дорівнює нулю:

$$\vec{R}^i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^i = 0; \quad (4.4)$$

2) геометрична сума моментів усіх внутрішніх сил (головний момент) системи відносно довільної точки O дорівнює нулю:

$$\vec{M}_O^i = \sum_{j=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_j^i) = 0, \quad (4.5)$$

де \vec{F}_j^i – рівнодійна внутрішніх сил, що діють на j -у точку.

4.3. Моменти інерції твердого тіла

Інертність тіла, що рухається поступально, як і однієї матеріальної точки, повністю визначається його масою. При більш складному русі тіла необхідно враховувати розподіл маси в просторі. Характеристиками такого розподілу є моменти інерції.

Проведемо через довільну точку O три взаємно перпендикулярні координатні осі x , y , z і розглянемо тіло як сукупність матеріальних точок (рис. 4.1). Моментом інерції твердого тіла відносно осі (осьовим моментом інерції) називають величину, що дорівнює сумі добутків мас всіх точок тіла на квадрати їх відстаней від даної осі.

Позначивши моменти інерції тіла відносно осей x , y , z через I_x, I_y, I_z і опустивши з точки M_j пер-

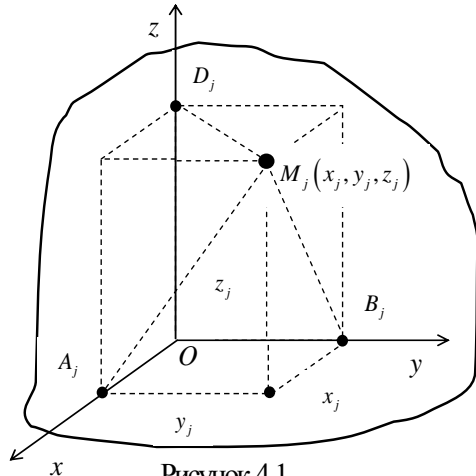


Рисунок 4.1

пендикуляри M_jA_j, M_jB_j, M_jD_j на ці осі, отримаємо:

$$(M_j A_j)^2 = y_j^2 + z_j^2; \quad (M_j B_j)^2 = x_j^2 + z_j^2; \quad (M_j D_j)^2 = x_j^2 + y_j^2;$$

$$I_x = \sum_{j=1}^N m_j (y_j^2 + z_j^2); \quad I_y = \sum_{j=1}^N m_j (x_j^2 + z_j^2); \quad I_z = \sum_{j=1}^N m_j (x_j^2 + y_j^2). \quad (4.6)$$

Момент інерції твердого тіла відносно деякої осі, наприклад, осі z , можна подати у вигляді добутку маси тіла на квадрат величини, званої *радіусом інерції* i_z тіла відносно даної осі:

$$I_z = m i_z^2. \quad (4.7)$$

Таким чином, радіус інерції i_z дорівнює відстані від осі z до точки, в якій потрібно зосередити всю масу тіла, щоб момент інерції точки відносно цієї осі дорівнював моменту інерції тіла.

Моментом інерції твердого тіла відносно полюса (полярним моментом інерції) називають величину, що дорівнює сумі добутків мас всіх точок тіла на квадрати їх відстаней від даного полюса. Позначивши через I_O момент інерції тіла відносно початку координат O , запишемо:

$$I_O = \sum_{j=1}^N m_j (M_j O)^2 = \sum_{j=1}^N m_j (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2). \quad (4.8)$$

Порівнюючи формули (4.6) і (4.8), можна визначити залежність між осьовими і полярним моментами інерції:

$$I_O = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z). \quad (4.9)$$

Осьові та полярні моменти інерції – величини невід’ємні. Осьовий момент інерції дорівнює нулю тільки в тому випадку, коли вся маса тіла розподілена вздовж осі, відносно якої цей момент визначають.

Для характеристики розподілу маси тіла використовують також *відцентрові моменти інерції*, що визначаються рівностями:

$$I_{xy} = \sum_{j=1}^N m_j x_j y_j; \quad I_{yz} = \sum_{j=1}^N m_j y_j z_j; \quad I_{zx} = \sum_{j=1}^N m_j z_j x_j. \quad (4.10)$$

З наведених формул видно, що відцентрові моменти інерції симетричні щодо своїх індексів: $I_{xy} = I_{yx}$; $I_{yz} = I_{zy}$; $I_{zx} = I_{xz}$. Вони залежать як від напрямку координатних осей, так і від вибору початку координат. На відміну від осьових і полярних, відцентрові моменти інерції можуть бути додатними, від’ємними і нульовими.

Якщо обидва відцентрові моменти інерції, що містять в індексах позначення деякої осі, дорівнюють нулю, то цю вісь називають *головною віссю інерції* тіла в даній точці. Нехай $I_{xy} = I_{zy} = 0$, тоді вісь y – головна вісь інерції. Якщо ця вісь проходить через центр мас тіла, то її називають *головною центральною віссю інерції*.

Відзначимо два частинних випадка:

1) якщо тіло має площину матеріальної симетрії, то для будь-якої її точки вісь, перпендикулярна цій площині, є головною віссю інерції;

2) якщо тіло має вісь матеріальної симетрії, то вона є головною центральною віссю інерції тіла. Під матеріальною симетрією розуміють не тільки геометричну симетрію, але і симетричний розподіл щільності.

4.4. Моменти інерції тіла відносно паралельних осей

Розглянемо співвідношення між моментами інерції твердого тіла відносно паралельних осей, одна з яких проходить через центр мас тіла.

Теорема Гюйгенса - Штейнера. *Момент інерції тіла відносно деякої осі дорівнює його моменту інерції відносно осі, що паралельна даній і проходить через центр мас тіла, доданому з добутком маси тіла на квадрат відстані між осями.*

Для доведення теореми використаємо координатні системи $Cx_1y_1z_1$ і $Oxyz$ (рис. 4.2), у яких осі Ox і Cx_1 збігаються, $Oy \parallel Cy_1$, $Oz \parallel Cz_1$, де C – центр мас тіла. Розглянемо моменти інерції тіла відносно осей Oz і Cz_1 , відстань між якими дорівнює d . Співвідношення між координатами довільної точки M_j в системах $Cx_1y_1z_1$ і $Oxyz$, будуть такими: $x_j = x_{1j} - d$; $y_j = y_{1j}$. Відповідно до формул (4.6) отримаємо:

$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \sum_{j=1}^N m_j (x_j^2 + y_j^2) = \sum_{j=1}^N m_j \left[(x_{1j} - d)^2 + y_{1j}^2 \right] = \\ &= \sum_{j=1}^N m_j (x_{1j}^2 + y_{1j}^2 - 2dx_{1j} + d^2) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^N m_j (x_{1j}^2 + y_{1j}^2) - 2d \sum_{j=1}^N m_j x_{1j} + d^2 \sum_{j=1}^N m_j, \quad (4.11)$$

де

$$\sum_{j=1}^N m_j (x_{1j}^2 + y_{1j}^2) = I_{Cz_1}; \quad \sum_{j=1}^N m_j = m.$$

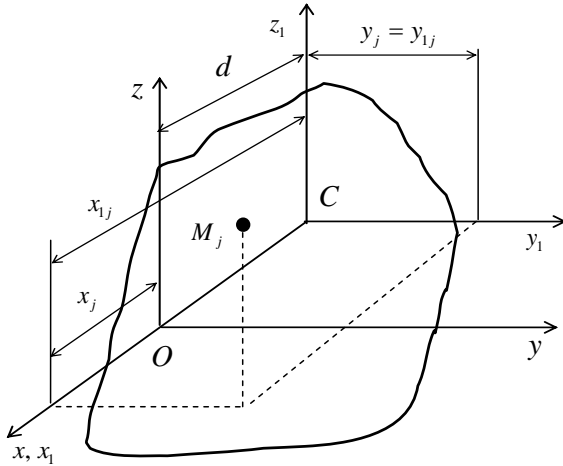


Рисунок 4.2

З формул (4.3), що визначають координати центру мас, випливає:

$$\sum_{j=1}^N m_j x_{1j} = m x_{1C} = 0,$$

тому що $x_{1C} = 0$. З формули (4.11) отримаємо:

$$I_{Oz} = I_{Cz_1} + m d^2. \quad (4.12)$$

Таким чином, якщо розглядати систему паралельних осей, то найменший момент інерції тіло має відносно тієї осі, яка проходить через його центр мас.

4.5. Приклади визначення моментів інерції однорідних тіл

4.5.1. Визначимо момент інерції тонкого однорідного стержня постій-

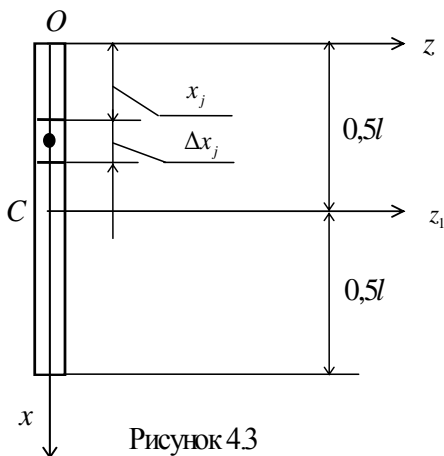


Рисунок 4.3

ного перерізу відносно осі z , що перпендикулярна осі стержня і проходить через його кінець (рис. 4.3). Розділимо стержень по довжині на малі елементи. Масу елемента довжиною Δx_j знайдемо з рівності $m_j = \rho \Delta x_j$, де $\rho = m/l$ – маса одиниці довжини стержня, m і l – його маса і довжина.

Момент інерції стержня визначимо за третьою формулою (4.6),

поклавши $y_j = 0$:

$$I_{Oz} = \sum_{j=1}^N m_j x_j^2 = \rho \sum_{j=1}^N x_j^2 \Delta x_j.$$

Переходячи до границі суми, отримаємо визначений інтеграл:

$$I_{Oz} = \rho \int_0^l x^2 dx = \frac{m}{l} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{ml^3}{3l} = \frac{ml^2}{3}. \quad (4.13)$$

Для визначення моменту інерції стержня відносно осі Cz_1 , що проходить через його центр мас паралельно осі Oz , використаємо співвідношення (4.12):

$$I_{Oz} = I_{Cz_1} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2,$$

звідки отримаємо:

$$I_{Cz_1} = I_{Oz} - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{12}. \quad (4.14)$$

4.5.2. Визначимо момент інерції круглого однорідного циліндра відносно його поздовжньої осі Cz (рис. 4.4). Нехай радіус циліндра дорівнює R , а його маса m .

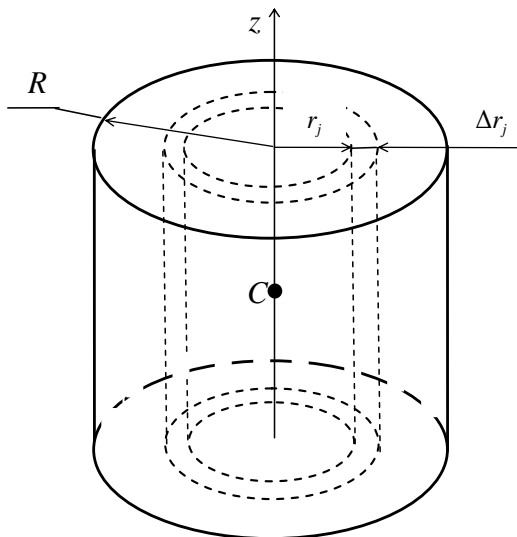


Рисунок 4.4

Побудуємо циліндричну трубку радіусом r_j і товщиною Δr_j . Маса цієї трубки $m_j = \rho \Delta S_j$, де ΔS_j – площа кільця, $\Delta S_j \approx 2\pi r_j \Delta r_j$; ρ – маса циліндра, відповідна одиниці площі основи, $\rho = \frac{m}{\pi R^2}$.

Всі елементи трубки знаходяться на однаковій відстані від її осі, тому момент інерції циліндра знайдемо за формулою

$$I_{Cz} = \sum_{j=1}^N m_j r_j^2 = 2\pi\rho \sum_{j=1}^N r_j^3 \Delta r_j.$$

Переходячи до границі суми, отримаємо визначений інтеграл

$$I_{Cz} = 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{m}{\pi R^2} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{mR^2}{2}. \quad (4.15)$$

Питання для самоконтролю

1. Як визначити радіус-вектор центра мас механічної системи?
2. Як записати вираз для декартових координат центру мас?
3. Дайте визначення зовнішніх і внутрішніх сил.
4. Які властивості мають внутрішні сили?
5. Дайте визначення осьових, полярних і відцентрових моментів інерції твердого тіла.
6. Сформулюйте теорему про моменти інерції тіла відносно паралельних осей.

Лекція 5. ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІЛЬКОСТІ РУХУ І ПРО РУХ ЦЕНТРУ МАС МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

5.1. Загальні теореми динаміки. Міри механічного руху та міри дії сили

Як уже зазначалося, будь-яка механічна система може бути розглянута як сукупність матеріальних точок. Рух кожної з них описується диференціальним рівнянням виду (1.3), а рух всієї системи визначається диференціальними рівняннями

$$m_j \frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} = \vec{F}_j^e + \vec{F}_j^i, \quad j = \overline{1, N}, \quad (5.1)$$

де \vec{F}_j^e , \vec{F}_j^i – рівнодійні всіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на j -у точку системи. Безпосереднє використання рівнянь (5.1) для дослідження механічної системи обмежується як кількістю її точок, так і необхідністю врахування внутрішніх сил, які в більшості випадків є невідомими.

Розглянуті нижче загальні теореми динаміки дозволяють визначати загальні динамічні характеристики руху системи, не досліджуючи рух її окремих точок. Вони встановлюють співвідношення між *мірами механічного руху* (кількістю руху, кінетичним моментом і кінетичною енергією) і *мірами дії сили* (імпульсом, моментом і роботою сили).

5.2. Кількість руху матеріальної точки і механічної системи

Кількість руху матеріальної точки – це векторна міра механічного руху, що дорівнює добутку маси точки на її швидкість: $m\vec{v}$. Одиниця виміру кількості руху в системі СІ – $1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. *Кількість руху механічної системи* дорівнює сумі кількостей руху всіх матеріальних точок, що утворюють систему:

$$\vec{K} = \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j. \quad (5.2)$$

Перетворимо отриману формулу:

$$\vec{K} = \sum_{j=1}^N m_j \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j.$$

Відповідно до формули (4.2) $\sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j = m \vec{r}_C$, тому

$$\vec{K} = \frac{d}{dt}(m \vec{r}_C) = m \frac{d\vec{r}_C}{dt} = m \vec{v}_C.$$

Таким чином, кількість руху механічної системи дорівнює добутку її маси на швидкість центру мас:

$$\vec{K} = m \vec{v}_C. \quad (5.3)$$

Оскільки кількість руху системи визначається рухом тільки однієї її точки (центру мас), вона не може бути повною характеристикою руху системи. Дійсно, при будь-якому русі системи, коли її центр мас залишається нерухомим, кількість руху системи дорівнює нулю. Наприклад, це має місце при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі, що проходить через його центр мас.

Введемо систему відліку S_{xyz} , що має початок в центрі мас

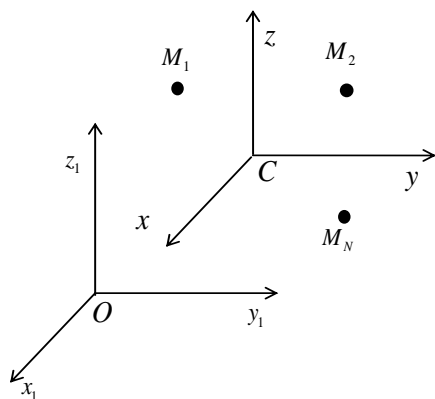


Рисунок 5.1

механічної системи C і рухається поступально відносно інерціальної системи $Ox_1y_1z_1$ (рис. 5.1). Тоді рух кожної точки M_j можна розглядати як складний: переносний рух разом з осями S_{xyz} і рух відносно цих осей. В силу поступальності руху осей S_{xyz} переносна швидкість кожної точки дорівнює швидкості центру мас системи, і кількість руху системи, що визначається за формулою (5.3), характеризує тільки її

поступальний переносний рух.

5.3. Імпульс сили

Для характеристики дії сили за деякий проміжок часу використовують величину, звану *імпульсом сили*. Елементарний імпульс сили –

це векторна міра дії сили, що дорівнює добутку сили на елементарний проміжок часу її дії:

$$d\vec{S} = \vec{F}dt . \quad (5.4)$$

Одиниця виміру імпульсу сили в системі СІ дорівнює $1\text{Н}\cdot\text{с} = 1\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}$, тобто розмірності імпульсу сили і кількості руху однакові.

Імпульс сили за кінцевий проміжок часу $[t_1, t_2]$ дорівнює визначеному інтегралу від елементарного імпульсу:

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt . \quad (5.5)$$

Імпульс сталої сили дорівнює добутку сили на час її дії:

$$\vec{S} = \vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{F}\tau . \quad (5.6)$$

У загальному випадку імпульс сили може бути визначений за його проекціями на координатні осі:

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt; \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt; \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt . \quad (5.7)$$

5.4. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

В основному рівнянні динаміки (1.2) маса матеріальної точки – величина стала, її прискорення $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, що дає можливість записати це рівняння у вигляді:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k . \quad (5.8)$$

Отримане співвідношення дозволяє сформулювати **теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі**. Похідна за часом від кількості руху матеріальної точки дорівнює геометричній сумі (головному вектору) діючих на точку сил.

Тепер отримаємо інтегральну форму цієї теореми. Зі співвідношення (5.8) випливає, що

$$d(m\vec{v}) = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k dt .$$

Проінтегруємо обидві частини рівності в межах, що відповідають моментам часу t_1 і t_2 :

$$\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d(m\vec{v}) = \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k dt. \quad (5.9)$$

Інтеграли в правій частині являють собою імпульси сил, що діють на точку, тому після інтегрування лівої частини отримаємо:

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k. \quad (5.10)$$

Таким чином, доведено **теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі**. *Зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів діючих на точку сил за той же проміжок часу.*

Векторному рівнянню (5.10) відповідає система трьох рівнянь в проекціях на координатні осі:

$$\begin{aligned} mv_{2x} - mv_{1x} &= \sum_{k=1}^n S_{kx}; \\ mv_{2y} - mv_{1y} &= \sum_{k=1}^n S_{ky}; \\ mv_{2z} - mv_{1z} &= \sum_{k=1}^n S_{kz}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Приклад 1. Тіло рухається поступально по похилій площині, що утворює кут α з горизонтом. У початковий момент часу воно мало швидкість \vec{v}_1 , напрямлену вгору по похилій площині (рис. 5.2).

Через який час швидкість тіла стане рівною нулю, якщо коефіцієнт тертя дорівнює f ?

Будемо вважати тіло, що рухається поступально, матеріальною точкою і розглянемо діючі на нього сили. Це сила ваги $m\vec{g}$, нормальна реакція площини \vec{N} і сила тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$. Направимо вісь x уздовж похилої площини вгору і запишемо перше рівняння системи (5.11)

$$mv_{2x} - mv_{1x} = S_x(m\vec{g}) + S_x(\vec{N}) + S_x(\vec{F}_{\text{тр}}), \quad (5.12)$$

де проекції кількостей руху $mv_{1x} = mv_1$; $mv_{2x} = 0$, а проекції імпульсів сталих сил $m\vec{g}$, \vec{N} і $\vec{F}_{\text{тр}}$ дорівнюють добуткам проекцій сил на час руху:

$$S_x(m\vec{g}) = -mg \sin \alpha \cdot t; \quad S_x(\vec{N}) = 0; \quad S_x(\vec{F}_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}} t.$$

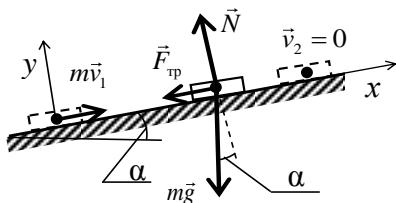


Рисунок 5.2

Прискорення тіла направлене уздовж похилої площини, тому сума проєкцій на вісь у усіх діючих на тіло сил дорівнює нулю: $N - mg \cos \alpha = 0$, звідки випливає: $N = mg \cos \alpha$. Знайдемо силу тертя

$$F_{\text{тр}} = fN = fmg \cos \alpha$$

і з рівняння (5.12) отримаємо:

$$0 - mv_1 = -mg \sin \alpha \cdot t - fmg \cos \alpha \cdot t,$$

звідки визначимо час руху тіла:

$$t = \frac{v_1}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

5.5. Теорема про зміну кількості руху механічної системи

Розглянемо систему з N матеріальних точок, для кожної з яких запишемо основне рівняння динаміки:

$$m_j \vec{a}_j = \vec{F}_j^e + \vec{F}_j^i, \quad j = \overline{1, N}.$$

Складемо почленно всі рівняння:

$$\sum_{j=1}^N m_j \vec{a}_j = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^e + \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^i. \quad (5.13)$$

По першій властивості внутрішніх сил $\sum_{j=1}^N \vec{F}_j^i = 0$. Перетворюючи ліву частину рівняння (5.13)

$$\sum_{j=1}^N m_j \vec{a}_j = \sum_{j=1}^N m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j = \frac{d\vec{K}}{dt},$$

отримаємо:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^e = \vec{R}^e, \quad (5.14)$$

де \vec{R}^e – головний вектор зовнішніх сил системи.

Таким чином, доведено **теорему про зміну кількості руху системи в диференціальній формі**. *Похідна за часом від кількості руху механічної системи дорівнює геометричній сумі (головному вектору) всіх зовнішніх сил, що діють на систему.*

Векторному рівнянню (5.14) відповідають три рівняння в проєкціях на координатні осі:

$$\frac{dK_x}{dt} = R_x^e; \quad \frac{dK_y}{dt} = R_y^e; \quad \frac{dK_z}{dt} = R_z^e. \quad (5.15)$$

З теореми випливають такі наслідки:

1) внутрішні сили не впливають безпосередньо на зміну кількості руху механічної системи. Слід зауважити, що внутрішні сили не входять в рівняння (5.14) і (5.15), однак вони можуть викликати зовнішні сили, що діють на систему, і тим самим надавати непрямий вплив на зміну її кількості руху;

2) якщо головний вектор зовнішніх сил на даному проміжку часу дорівнює нулю, то кількість руху системи залишається сталою.

Дійсно, якщо $\vec{R}^e = 0$, то з рівняння (5.14) випливає, що $\frac{d\vec{K}}{dt} = 0$, звідки

$$\vec{K} = \text{const};$$

3) якщо проєкція головного вектора зовнішніх сил на деяку вісь на даному проміжку часу дорівнює нулю, то проєкція кількості руху системи на цю ж вісь залишається сталою. Так, наприклад, якщо $R_x^e = 0$, то з першого рівняння (5.15) отримаємо

$$\frac{dK_x}{dt} = 0, \text{ тобто } K_x = \text{const}.$$

Наслідки 2 і 3 висловлюють **закон збереження кількості руху системи**.

Приклад 2. Вантаж A утримується на похилій площині нерухомого клина B за допомогою троса. Після того, як трос був перерізаний, вантаж почав рухатися по цій площині, нахилений до горизонту під кутом α (рис. 5.3).

Нехтуючи тертям, визначити залежність швидкості клина v від швидкості вантажу v_r відносно клина, якщо маси вантажу і клина

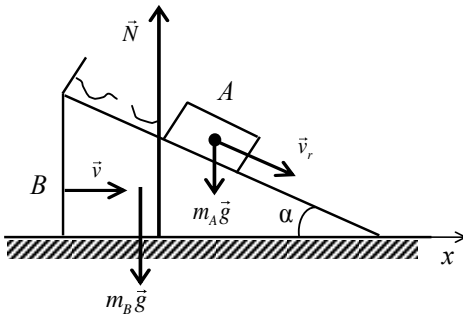


Рисунок 5.3

дорівнюють m_A і m_B .

На систему, що складається з вантажу A і клина B , діють зовнішні сили: $m_A \vec{g}$, $m_B \vec{g}$ – сили ваги вантажу і клина, \vec{N} – нормальна реакція гладкої горизонтальної площини. Усі вони перпендикулярні горизонтальній осі x , тому проекція головного вектора зовнішніх сил на цю

вісь дорівнює нулю. З наслідку 3 отримаємо, що $K_x = \text{const}$, тобто проекція кількості руху системи на вісь x не змінюється і, отже, дорівнює своєму початковому значенню: $K_x = K_{x0}$. Але спочатку система була нерухома, тобто $K_{x0} = 0$, і тому в будь-який момент часу $K_x = 0$.

Визначимо кількість руху системи

$$\vec{K} = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B, \quad (5.16)$$

де \vec{v}_A, \vec{v}_B – абсолютні швидкості вантажу і клина, $\vec{v}_A = \vec{v}_{Ar} + \vec{v}_{Ae}$, $\vec{v}_B = \vec{v}$. Тут \vec{v}_{Ar} – відносна швидкість вантажу, $\vec{v}_{Ar} = \vec{v}_r$; \vec{v}_{Ae} – переносна швидкість, $\vec{v}_{Ae} = \vec{v}_B = \vec{v}$. Тому $\vec{v}_A = \vec{v}_r + \vec{v}$ і з рівняння (5.16) отримаємо:

$$\vec{K} = m_A (\vec{v}_r + \vec{v}) + m_B \vec{v} = m_A \vec{v}_r + (m_A + m_B) \vec{v}.$$

Спроектуємо цей векторний вираз на вісь x і прирівняємо його нулю:

$$K_x = m_A v_r \cos \alpha + (m_A + m_B) v_x = 0,$$

звідки отримаємо:

$$v_x = -\frac{m_A v_r \cos \alpha}{m_A + m_B}.$$

Від'ємне значення проекції показує, що дійсний напрямок вектора \vec{v} протилежний зображеному на рис. 5.3, тобто клин B рухається вліво.

Перетворимо рівняння (5.14), помноживши обидві його частини на dt , і проінтегруємо в межах, що відповідають моментам часу t_1, t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{K} = \sum_{j=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_j^e dt .$$

Інтеграли в правій частині цієї рівності являють собою імпульси зовнішніх сил, тому, інтегруючи його ліву частину, запишемо:

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum_{j=1}^N \vec{S}_j^e , \quad (5.17)$$

де $\vec{K}_2 = \vec{K}(t_2)$, $\vec{K}_1 = \vec{K}(t_1)$.

Отримане співвідношення дозволяє сформулювати **теорему про зміну кількості руху системи в інтегральній формі**. *Зміна кількості руху механічної системи за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів всіх зовнішніх сил, що діють на систему, за той же проміжок часу.*

Векторне рівняння (5.17) еквівалентне трьом рівнянням в проекціях на координатні осі:

$$\begin{aligned} K_{2x} - K_{1x} &= \sum_{j=1}^N S_{jx}^e ; \\ K_{2y} - K_{1y} &= \sum_{j=1}^N S_{jy}^e ; \\ K_{2z} - K_{1z} &= \sum_{j=1}^N S_{jz}^e . \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.6. Теорема Ейлера

Зупинимося на застосуванні теореми про зміну кількості руху до суцільного середовища. Виділимо об'єм нестисливої рідини, обмежений в момент часу t бічною поверхнею труби змінного перерізу і двома плоскими поперечними перерізами, площі яких σ_1 і σ_2 (рис. 5.4). Позначимо через \vec{v}_1 і \vec{v}_2 середні швидкості частинок рідини, що протікає через ці перерізи, а через ρ – щільність рідини. При

усталеному русі маса рідини, що протікає через будь-який переріз труби в одиницю часу, стала:

$$m_c = \rho \sigma_1 v_1 = \rho \sigma_2 v_2.$$

Цю масу називають *секундною масою*.

Нехай за проміжок часу dt виділений об'єм рідини перемістився і зайняв положення між перерізами σ'_1 і σ'_2 . Визначимо зміну кількості руху об'єму за час dt . Позначимо через $\vec{K}_0, \vec{K}_1, \vec{K}_2$ кількості руху рідини, обмеженої перерізами σ_1 і σ_2 , σ_1 і σ'_1 , σ_2 і σ'_2 відповідно. Тепер визначимо кількість руху в моменти

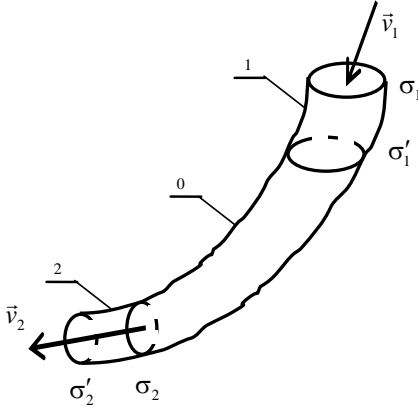


Рисунок 5.4

часу t і $t + dt$: $\vec{K}(t) = \vec{K}_0 + \vec{K}_1$, $\vec{K}(t + dt) = \vec{K}_0 + \vec{K}_2$, а також зміну кількості руху:

$$d\vec{K} = \vec{K}(t + dt) - \vec{K}(t) = \vec{K}_0 + \vec{K}_2 - \vec{K}_0 - \vec{K}_1 = \vec{K}_2 - \vec{K}_1,$$

де $\vec{K}_2 = m_c dt \cdot \vec{v}_2$; $\vec{K}_1 = m_c dt \cdot \vec{v}_1$, звідки $d\vec{K} = m_c dt \cdot \vec{v}_2 - m_c dt \cdot \vec{v}_1$. Розділивши останній вираз на dt , отримаємо:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = m_c \vec{v}_2 - m_c \vec{v}_1. \quad (5.19)$$

Добутки $m_c \vec{v}_2$ і $m_c \vec{v}_1$ називають *секундними кількостями руху рідини* в перерізах σ_2 і σ_1 .

Зовнішні сили, що діють на виділений об'єм рідини, можна розділити на об'ємні і поверхневі. *Об'ємними* називають сили, що діють на кожну частинку рідини, незалежно від того, чи знаходиться вона всередині виділеного об'єму або на його поверхні. До об'ємних відносять, наприклад, сили ваги частинок рідини. *Поверхневими* називають сили, які діють тільки на частинки, що лежать на поверхні

виділеного об'єму. Це сили тиску стінок труби на рідину, сили тертя рідини об стінки труби.

Позначимо через $\vec{R}_{об}$ і $\vec{R}_{пов}$ головні вектори об'ємних і поверхневих зовнішніх сил і, використовуючи диференціальну форму теореми про зміну кількості руху, запишемо:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}_{об} + \vec{R}_{пов}. \quad (5.20)$$

Прирівнюючи праві частини (5.19) і (5.20), отримаємо

$$m_c \vec{v}_2 - m_c \vec{v}_1 = \vec{R}_{об} + \vec{R}_{пов}$$

або

$$\vec{R}_{об} + \vec{R}_{пов} + m_c \vec{v}_1 - m_c \vec{v}_2 = 0. \quad (5.21)$$

Ця рівність є математичним записом **теореми Ейлера**. Сума головних векторів об'ємних і поверхневих зовнішніх сил, а також секундних кількостей руху рідини, що протікає через два поперечних перерізи труби, дорівнює нулю, якщо вектори секундних кількостей руху направити всередину виділеного перерізами об'єму.

Приклад 3. По трубі діаметром d , що розташована в горизонтальній площині і має зігнуте під прямим кутом коліно, тече вода зі швидкістю v (рис. 5.5).

Визначити горизонтальні складові головного вектора реакцій стінок зігнутої частини труби.

Об'ємні сили – це сили ваги, перпендикулярні горизонтальній площині xu ; поверхневі – реакції стінок труби; $\vec{X}_{пов}$, $\vec{Y}_{пов}$ – складові головного вектора реакцій стінок. Направимо вектори секундних кількостей руху $m_c \vec{v}_1$ і $-m_c \vec{v}_2$ всередину виділеного об'єму і запишемо рівняння (5.21) в проєкціях на координатні осі x і y

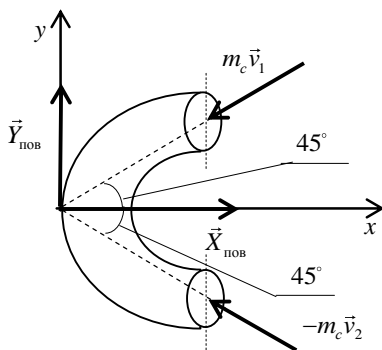


Рисунок 5.5

$$X_{пов} - m_c v_1 \cos 45^\circ - m_c v_2 \cos 45^\circ = 0;$$

$$Y_{\text{пов}} - m_c v_1 \sin 45^\circ + m_c v_2 \sin 45^\circ = 0,$$

де $v_1 = v_2 = v$, тому $Y_{\text{пов}} = 0$ і $X_{\text{пов}} = 2m_c v \cos 45^\circ = \sqrt{2}m_c v$;

$m_c = \rho \frac{\pi d^2}{4} v$; ρ – щільність води, звідки $X_{\text{пов}} = \sqrt{2}\rho \frac{\pi d^2}{4} v^2$. Оскільки

$Y_{\text{пов}} = 0$, горизонтальна складова головного вектора реакцій стінок зігнутої частини труби направлена вздовж осі x .

Приклад 4. Струмінь рідини щільністю ρ , що витікає зі швидкістю v з труби, площа поперечного перерізу якої дорівнює σ , зустрічає на своєму шляху вертикальну стіну (рис. 5.6).

Визначити силу тиску рідини на стіну, якщо вісь труби складає із стіною кут α .

Цей приклад може бути розв'язаний, як і попередній, як за допомогою теореми Ейлера, так і з використанням інтегральної форми теореми про зміну кількості руху.

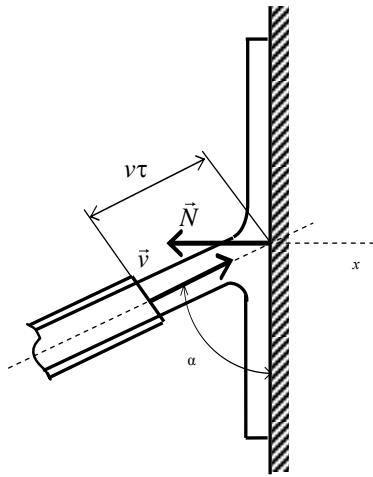


Рисунок 5.6

Розглянемо інтервал часу τ , протягом якого частинка рідини проходить відстань від кінця труби до стіни. Нехтуючи впливом сили ваги на форму струменя, виділимо об'єм рідини, яка витікає з труби за час τ . Маса цієї рідини $m = \rho \sigma v \tau$. На неї діють зовнішні сили: направлена вертикально вниз сила ваги, реакція стіни \vec{N} , перпендикулярна стіні, і тиск тієї частини рідини, яка стикається з виділеним об'ємом (цей тиск, зважаючи на його малість, враховувати не будемо).

Запишемо вираз для проекції кількості руху виділеного об'єму рідини в початковий момент часу $\vec{K}_1 = m\vec{v}$ на вісь x :

$$K_{1x} = K_1 \sin \alpha = mv \sin \alpha = \rho \sigma v^2 \tau \sin \alpha.$$

У момент часу $t_2 = \tau$ частинки цього об'єму рідини будуть мати швидкості, напрямлені уздовж стіни, тому проекція кількості руху $K_{2x} = 0$, проекція імпульсу реакції \vec{N} на вісь x : $S_{Nx} = -N\tau$, а проекція імпульсу сили ваги дорівнює нулю. Використаємо перше рівняння (5.18), з якого отримаємо:

$$K_{2x} - K_{1x} = S_{Nx} \quad \text{або} \quad -\rho\sigma v^2 \tau \sin \alpha = -N\tau,$$

звідки визначимо модуль реакції стіни $N = \rho\sigma v^2 \sin \alpha$. Шукана сила тиску рідини наярмлена протилежно реакції \vec{N} і дорівнює їй за величиною.

5.7. Теорема про рух центру мас механічної системи

Перетворимо рівність (5.14), підставивши кількість руху системи у вигляді (5.3):

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_C) = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^e.$$

Враховуючи, що маса системи стала, отримаємо:

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^e$$

або

$$m\vec{a}_C = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^e = \vec{R}^e. \quad (5.22)$$

Порівнюючи це рівняння з основним рівнянням динаміки точки (1.2), приходимо до наступного формулювання **теорему про рух центру мас**. *Центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, в якій зосереджена вся маса системи і до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на систему.*

Спроектуємо рівняння (5.22) на осі нерухомої декартової системи координат і отримаємо диференціальні рівняння руху центру мас:

$$m\ddot{x}_C = R_x^e; \quad m\ddot{y}_C = R_y^e; \quad m\ddot{z}_C = R_z^e. \quad (5.23)$$

Сформулюємо наслідки з теореми:

1) внутрішні сили не впливають безпосередньо на рух центру мас системи, але можуть надавати непрямий вплив через зовнішні сили (див. зауваження, наведене в першому наслідку підрозділу 5.5);

2) якщо головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему, на даному інтервалі часу дорівнює нулю, то центр мас системи знаходиться у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно.

Покладемо в рівнянні (5.22) $\vec{R}^e = 0$, тоді прискорення центру мас $\vec{a}_C = 0$, тобто його швидкість $\vec{v}_C = \text{const}$. При цьому, якщо початкова швидкість центру мас $\vec{v}_{C0} = 0$, то центр мас знаходиться у спокої, а якщо $\vec{v}_{C0} \neq 0$, то центр мас рухається рівномірно і прямолінійно з цією швидкістю;

3) якщо проекція головного вектора зовнішніх сил системи на деяку нерухому вісь на даному інтервалі часу дорівнює нулю, то проекція швидкості центру мас системи на цю вісь не змінюється.

Поклавши в 1-му рівнянні (5.23) $R_x^e = 0$, отримаємо, що $\ddot{x}_C = \dot{v}_{Cx} = 0$, тобто $v_{Cx} = \text{const}$. Якщо при цьому в початковий момент часу проекція швидкості центру мас $v_{Cx0} = 0$, то $v_{Cx} = \dot{x}_C = 0$, $x_C = \text{const}$, тобто центр мас не рухається уздовж осі x . Зупинимось на цьому випадку докладніше. Припустимо, що в початковий момент часу t_0 абсциси точок системи дорівнювали $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{N0}$, а в момент часу $t_0 + \Delta t$ стали рівні $x_{10} + \Delta x_1, x_{20} + \Delta x_2, \dots, x_{N0} + \Delta x_N$. Оскільки в розглянутому випадку $x_C = \text{const}$, з формул (4.3), що визначають координати центру мас, випливає:

$$x_C = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j x_{j0} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j (x_{j0} + \Delta x_j),$$

звідки після перетворень отримаємо:

$$\sum_{j=1}^N m_j \Delta x_j = 0. \quad (5.24)$$

Продовжимо вивчення руху системи, розглянутої в другому прикладі підрозділу 5.5.

Приклад 5. Визначити переміщення Δ клина B за той час, протягом якого вантаж A , рухаючись по похилій площині, проходить уздовж неї відстань l .

Як вже було показано, при русі вантажу A вниз по похилій площині клин B переміщується вліво (рис 5.7, де вгорі показано початкове, а внизу – кінцеве положення системи). Проекція головного

вектора зовнішніх сил системи на вісь x дорівнює нулю і спочатку система була нерухома. Таким чином, проекція початкової швидкості центру мас $v_{cx0}=0$, отже при русі системи координата x_c не змінюється і виконується співвідношення (5.24). У цьому співвідношенні Δx_j – прирости координат центрів мас тіл A і B , які вимірюються в нерухомій системі координат:

$$\Delta x_A = l \cos \alpha - \Delta, \quad \Delta x_B = -\Delta.$$

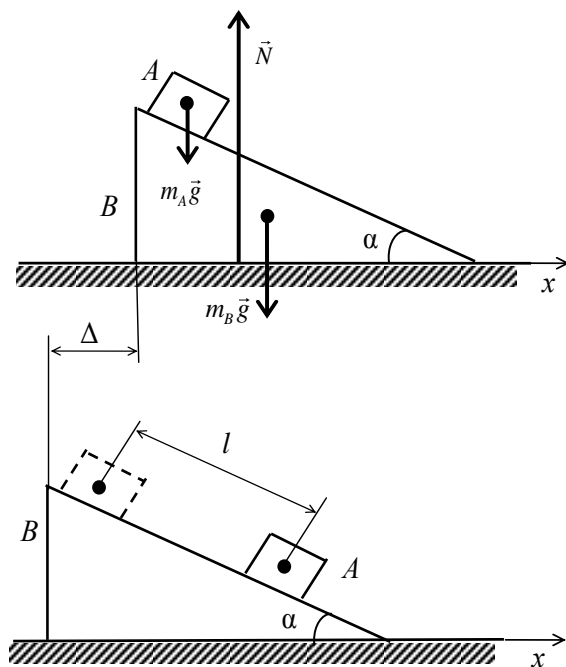


Рисунок 5.7

Рівняння (5.24) тепер прийме наступний вигляд:

$$m_A \Delta x_A + m_B \Delta x_B = 0 \quad \text{або} \quad m_A (l \cos \alpha - \Delta) - m_B \Delta = 0,$$

звідки отримаємо:

$$\Delta = \frac{m_A l \cos \alpha}{m_A + m_B}.$$

Зафіксуємо клин B , поставивши упор D , і визначимо реакцію упору \vec{X}_D , що діє на клин (рис. 5.8). Оскільки клин тепер не має можливості переміщатися, центр мас системи при русі вантажу A буде змінювати своє положення. Запишемо рівняння руху центру мас системи в проекціях на вісь x :

$$m\ddot{x}_C = X_D, \quad (5.25)$$

де $m = m_A + m_B$.

З формул (4.3) отримаємо:

$$m\ddot{x}_C = m_A\ddot{x}_A + m_B\ddot{x}_B.$$

Двічі диференціюючи цю рівність, запишемо:

$$m\ddot{x}_C = m_A\ddot{x}_A + m_B\ddot{x}_B.$$

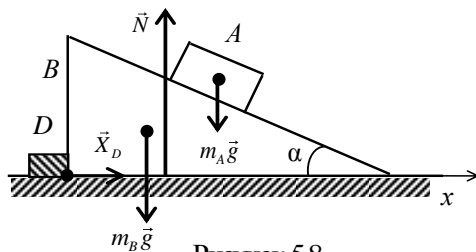


Рисунок 5.8

Але $x_B = \text{const}$, звідки $\ddot{x}_B = 0$; $\ddot{x}_A = a_{Ax}$, де a_A – прискорення вантажу, яке визначимо, записавши рівняння руху вантажу в проекціях на вісь

x_1 (рис. 5.9): $m_A a_A = m_A g \sin \alpha$.

З цього рівняння отримаємо:

$$a_A = g \sin \alpha; a_{Ax} = a_A \cos \alpha = g \sin \alpha \cos \alpha.$$

Остаточнo з рівняння (5.25) знайдемо:

$$\begin{aligned} X_D = m\ddot{x}_C &= m_A\ddot{x}_A = m_A a_{Ax} = \\ &= m_A g \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} m_A g \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

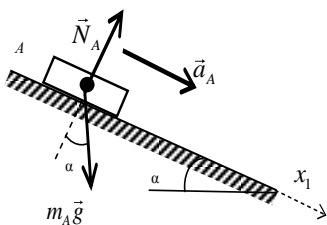


Рисунок 5.9

Питання для самоконтролю

1. Які існують міри механічного руху і міри дії сили?
2. Як визначити кількість руху матеріальної точки і механічної системи?
3. Як визначити елементарний імпульс сили та імпульс сили за кінцевий інтервал часу?
4. Сформулюйте теореми про зміну кількості руху матеріальної точки і механічної системи.
5. Сформулюйте теорему Ейлера.
6. Сформулюйте теорему про рух центру мас механічної системи.

Лекція 6. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОГО МОМЕНТУ

6.1. Кінетичний момент матеріальної точки і механічної системи

Кінетичний момент матеріальної точки M відносно нерухомого центру O – це величина, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора цієї точки, проведеного з центру O , на її кількість руху (рис. 6.1):

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (6.1)$$

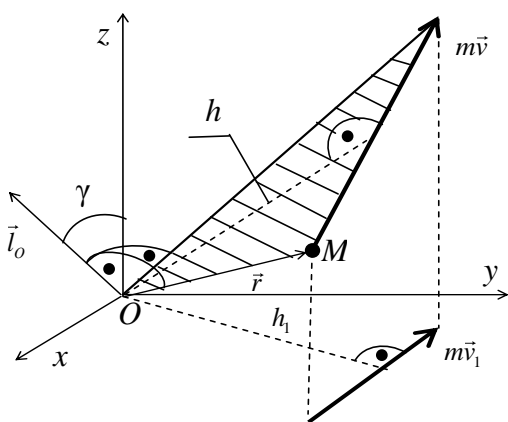


Рисунок 6.1

Векторний добуток в правій частині (6.1) являє собою момент вектора $m\vec{v}$ відносно центру O , звідси друга назва вектора \vec{l}_O – *момент кількості руху*,

$$\vec{l}_O = \vec{M}_O(m\vec{v}). \quad (6.2)$$

Вектор \vec{l}_O напрямлений перпендикулярно площині, що проходить через вектор $m\vec{v}$ і центр O , в той бік, звідки вектор $m\vec{v}$ видно

напрямленим проти годинникової стрілки відносно цього центру. Його модуль:

$$l_O = mvh, \quad (6.3)$$

де h – плече вектора $m\vec{v}$ відносно центру O .

Одиниця виміру кінетичного моменту в системі СІ– $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$.

Кінетичний момент матеріальної точки відносно нерухомої осі дорівнює проекції на цю вісь кінетичного моменту точки відносно будь-якого центру, обраного на даній осі (див. рис. 6.1):

$$l_z = l_O \cos \gamma. \quad (6.4)$$

Визначення кінетичного моменту відносно осі аналогічно обчисленню відповідного моменту сили – спроектуємо вектор $m\vec{v}$ на площину, пер-

пендикулярну осі, і визначимо алгебричний момент проекції відносно точки перетину осі і площини (див. рис. 6.1):

$$l_z = M_z (m\vec{v}) = \pm m v_1 h_1. \quad (6.5)$$

Кінетичний момент $l_z > 0$, якщо, дивлячись з додатного напрямку осі z , бачимо вектор $m\vec{v}_1$ напрямленим проти годинникової стрілки відносно центру O .

Кінетичний момент (головний момент кількостей руху) механічної системи відносно нерухомого центру O дорівнює сумі кінетичних моментів всіх матеріальних точок системи відносно цього центру:

$$\vec{L}_O = \sum_{j=1}^N \vec{L}_{jO} = \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j. \quad (6.6)$$

Аналогічно визначають кінетичний момент системи відносно нерухомої осі:

$$L_z = \sum_{j=1}^N l_{jz}. \quad (6.7)$$

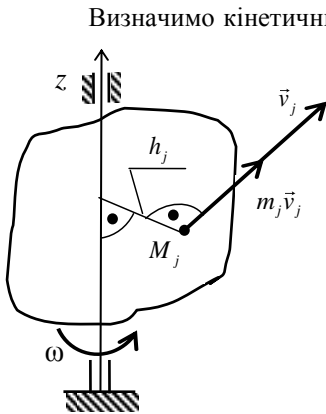


Рисунок 6.2

Визначимо кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання z (рис. 6.2). Позначивши через h_j відстань від точки M_j до осі обертання, обчислимо кінетичний момент точки відносно осі z

$$l_{jz} = m_j v_j h_j = m_j \omega_z h_j^2,$$

а також кінетичний момент тіла

$$L_z = \sum_{j=1}^N l_{jz} = \omega_z \sum_{j=1}^N m_j h_j^2. \quad (6.8)$$

За визначенням (див. підрозділ 4.3), отримана сума є моментом інерції тіла

відносно осі z : $I_z = \sum_{j=1}^N m_j h_j^2$, тому з виразу (6.8) отримаємо:

$$L_z = I_z \omega_z. \quad (6.9)$$

Таким чином, кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно даної осі на проекцію його кутової швидкості на ту ж вісь.

6.2. Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної точки

Продиференціюємо за часом співвідношення (6.1)

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a}. \quad (6.10)$$

Врахуємо, що $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$ як векторний добуток колінеарних векторів, а відповідно до рівняння (1.2) $m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$, і з рівності (6.10) отримаємо

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{r} \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n \vec{r} \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k).$$

Таким чином, доведена наступна **теорема**. *Похідна за часом від кінетичного моменту матеріальної точки відносно нерухомого центру дорівнює сумі моментів всіх сил, що діють на точку, відносно того ж центру:*

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k). \quad (6.11)$$

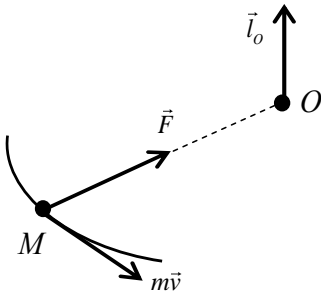


Рисунок 6.3

Розглянемо як приклад використання даної теореми рух матеріальної точки під дією центральної сили, тобто сили, лінія дії якої постійно проходить через деяку точку, нерухому в даній інерціальній системі відліку. Нехай лінія дії центральної сили весь час проходить через нерухому точку O (рис. 6.3), тоді $\vec{M}_O(\vec{F}) = 0$ і зі співвідношення (6.11) випливає, що

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = 0.$$

Таким чином, $\vec{l}_O = \text{const}$, а тому площа, що проходить через вектор $m\vec{v}$ і центр O , не змінює свого положення і траєкторія точки є плоскою кривою.

6.3. Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи

Розглянемо систему, що складається з N матеріальних точок, і запишемо для кожної з них співвідношення (6.11)

$$\frac{d\vec{l}_{jO}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_j^e) + \vec{M}_O(\vec{F}_j^i), \quad j = \overline{1, N},$$

де, як уже зазначалося, \vec{F}_j^e, \vec{F}_j^i – рівнодійні всіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до j -ї точки системи.

Складемо почленно отримані рівняння:

$$\sum_{j=1}^N \frac{d\vec{l}_{jO}}{dt} = \sum_{j=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_j^e) + \sum_{j=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_j^i). \quad (6.12)$$

З другої властивості внутрішніх сил випливає, що $\sum_{j=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_j^i) = 0$. Перетворюючи ліву частину рівняння (6.12)

$$\sum_{j=1}^N \frac{d\vec{l}_{jO}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \vec{l}_{jO} = \frac{d\vec{L}_O}{dt},$$

отримаємо з нього

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{j=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_j^e) = \vec{M}_O^e, \quad (6.13)$$

де \vec{M}_O^e – головний момент зовнішніх сил системи відносно центру O .

Отже, доведена наступна **теорема**. *Похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи відносно нерухомого центру дорівнює головному моменту зовнішніх сил системи відносно того ж центру.*

Векторному рівнянню (6.13) відповідають три рівняння в проєкціях на осі координат:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^e, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^e, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^e, \quad (6.14)$$

де M_x^e, M_y^e, M_z^e – головні моменти зовнішніх сил відносно осей x, y, z . Слід зазначити, що рівняння виду (6.14) рекомендується використовувати при розгляді системи, до складу якої входить тіло, що обертається навколо нерухомої осі. Тоді, поєднуючи одну з координатних осей з віссю обертання, одержимо рівняння, що не містить невідомих реакцій опор обертового тіла.

Приклад 1. Вантаж A , спускаючись по гладкій похилій площині, приводить в обертання барабан B за допомогою намотаного на нього тросу (рис. 6.4).

Визначити залежність кутової швидкості барабана від часу, якщо відомі маса вантажу m_A , момент інерції барабана I_z відносно його осі обертання z , радіус барабана r і кут нахилу α площини до горизонту.

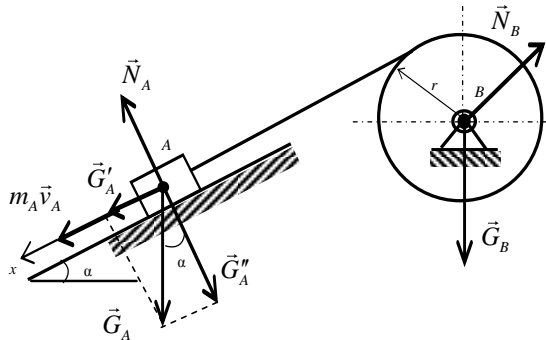


Рисунок 6.4

Масою троса знехтувати і врахувати, що в початковий момент часу система перебувала в стані спокою.

На систему, що складається з вантажу A і барабана B , діють зовнішні сили: сила ваги вантажу \vec{G}_A і сила ваги барабана \vec{G}_B , нормальна реакція похилої площини \vec{N}_A і реакція осі барабана \vec{N}_B . Напрявимо вісь z вздовж осі обертання барабана до нас і використаємо третє рівняння системи (6.14):

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e. \quad (6.15)$$

Кінетичний момент системи відносно осі z дорівнює сумі кінетичних моментів вантажу і барабану. Вважаючи вантаж, що рухається поступально, матеріальною точкою, отримаємо:

$$L_z = L_{zA} + L_{zB} = M_z (m_A \vec{v}_A) + I_z \omega_z = m_A v_A r + I_z \omega_z.$$

Оскільки $v_A = v_{Ax} = \omega_z r$, остаточно запишемо:

$$L_z = (m_A r^2 + I_z) \omega_z. \quad (6.16)$$

Для визначення головного моменту зовнішніх сил відносно осі z розкладемо силу \vec{G}_A на складові \vec{G}'_A і \vec{G}''_A , що напрямлені уздовж похилої площини і по нормалі до неї. Сили \vec{G}''_A і \vec{N}_A рівні за модулем і напрямлені уздовж однієї прямої в протилежні боки, тому сума їх моментів відносно осі z дорівнює нулю. Сили \vec{G}'_A і \vec{N}_B не мають моментів відносно осі z , тому що їх лінії дії перетинають цю вісь. Таким чином, головний момент зовнішніх сил відносно осі z

$$M_z^e = M_z(\vec{G}'_A) = \vec{G}'_A r = G_A \sin \alpha \cdot r = m_A g r \sin \alpha. \quad (6.17)$$

Тепер підставимо (6.16) і (6.17) в рівняння (6.15):

$$(m_A r^2 + I_z) \frac{d\omega_z}{dt} = m_A g r \sin \alpha,$$

звідки отримаємо

$$d\omega_z = \frac{m_A g r \sin \alpha}{m_A r^2 + I_z} dt.$$

Проінтегруємо це диференціальне рівняння, враховуючи границі зміни величин:

$$\int_0^{\omega_z} d\omega_z = \frac{m_A g r \sin \alpha}{m_A r^2 + I_z} \int_0^t dt;$$

$$\omega_z = \frac{m_A g r \sin \alpha}{m_A r^2 + I_z} t.$$

Сформулюємо наслідки з цієї теореми:

1) внутрішні сили не впливають безпосередньо на зміну кінетичного моменту механічної системи, а їх непрямий вплив здійснюється через зовнішні сили (див. зауваження в підрозділі 5.5);

2) якщо головний момент зовнішніх сил відносно деякого нерухомого центру на розглядуваному проміжку часу дорівнює нулю, то кінетичний момент системи відносно цього центру залишається сталим. Поклавши в рівнянні (6.13) $\vec{M}_O^e = 0$, отримаємо, що

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \quad \text{і} \quad \vec{L}_O = \text{const} ;$$

3) якщо головний момент зовнішніх сил відносно деякої нерухомої осі на розглядуваному проміжку часу дорівнює нулю, то кінетичний момент системи відносно цієї осі залишається сталим. Дійсно, якщо $M_x^e = 0$, то з першого рівняння (6.14) отримаємо $\frac{dL_x}{dt} = 0$ і $L_x = \text{const}$.

Другий і третій наслідки виражають закон збереження кінетичного моменту механічної системи.

Приклад 2. У точці D обою однорідного диску 1, що обертається навколо нерухомої вертикальної осі з кутовою швидкістю ω_0 , знаходиться точковий вантаж 2, маса якого в два рази менше маси диску (рис. 6.5а.). У деякий момент часу вантаж, який є самохідним механізмом, починає рухатися по хорді DE . Радіус диску дорівнює r , $CO = 0,5r$.

Визначити кутову швидкість диску ω_1 при проходженні вантажу через середину хорди O , якщо в цей момент швидкість вантажу відносно диску дорівнює v_r (рис. 6.5б). Силами опору знехтувати.

Розглянемо систему, що складається з диску 1 і вантажу 2. На неї діють зовнішні сили: сила ваги диску \vec{G}_1 , сила ваги вантажу \vec{G}_2 і складові реакцій опор $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$. Моменти всіх цих сил відносно осі z дорівнюють нулю, тому головний момент зовнішніх сил $M_z^e = 0$ і кінетичний момент системи відносно осі z не змінюється, тобто $L_z = \text{const}$. Отже, $L_{\text{зн}} = L_{\text{зк}}$, де $L_{\text{зн}}, L_{\text{зк}}$ – початковий і кінцевий кінетичні моменти системи, які відповідають положенням вантажу в точках D і O .

У початковий момент часу диск і вантаж являють собою одне тіло, що обертається навколо осі z , тому

$$\begin{aligned} L_{\text{зн}} &= I_{\text{зн}} \omega_0 ; \\ I_{\text{зн}} &= I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = \frac{m_1 r^2}{2} + m_2 r^2 = \frac{m_1 r^2}{2} + \frac{m_1}{2} r^2 = m_1 r^2 ; \\ L_{\text{зн}} &= m_1 r^2 \omega_0 . \end{aligned} \tag{6.18}$$

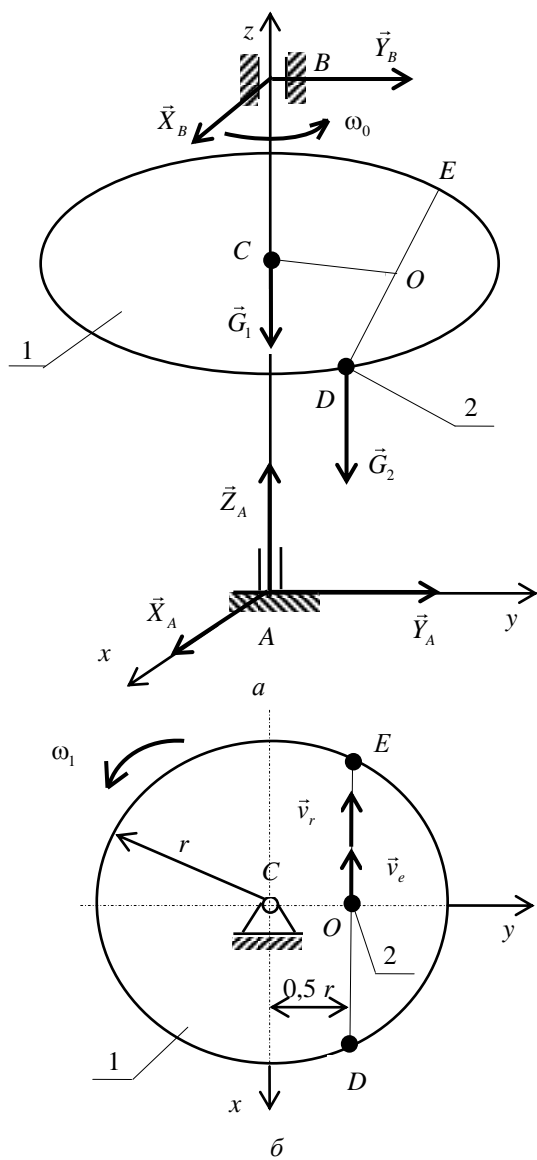


Рисунок 6.5

У кінцевий момент часу кінетичний момент системи дорівнює сумі кінетичних моментів диску і вантажу:

$$L_{\text{зк}} = L_{\text{зк}}^{(1)} + L_{\text{зк}}^{(2)} = I_z^{(1)} \omega_1 + M_z (m_2 \vec{v}_a), \quad (6.19)$$

де \vec{v}_a – абсолютна швидкість вантажу, $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$. Відносна \vec{v}_r і переносна \vec{v}_e швидкості вантажу в точці O напрямлені уздовж хорди DE ,

$$v_e = \omega_1 \cdot 0,5r ;$$

$$\begin{aligned} M_z (m_2 \vec{v}_a) &= M_z (m_2 \vec{v}_r) + M_z (m_2 \vec{v}_e) = m_2 v_r \cdot 0,5r + m_2 v_e \cdot 0,5r = \\ &= 0,5 \frac{m_1}{2} r (v_r + 0,5r \omega_1) = 0,25 m_1 r (v_r + 0,5r \omega_1). \end{aligned}$$

З рівності (6.19) випливає, що

$$L_{\text{зк}} = \frac{m_1 r^2}{2} \omega_1 + 0,25 m_1 r (v_r + 0,5r \omega_1) = 0,625 m_1 r^2 \omega_1 + 0,25 m_1 r v_r. \quad (6.20)$$

Прирівнюючи праві частини рівностей (6.18) і (6.20)

$$m_1 r^2 \omega_0 = 0,625 m_1 r^2 \omega_1 + 0,25 m_1 r v_r ,$$

$$\text{отримаємо: } \omega_1 = 1,6 \omega_0 - 0,4 \frac{v_r}{r} .$$

6.4. Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла

Розглянемо тіло, що обертається навколо нерухомої осі z з кутовою швидкістю ω . На нього діють система зовнішніх сил ($\vec{F}_1^e, \dots, \vec{F}_n^e$) і реакції опор \vec{R}_A, \vec{R}_B (рис. 6.6). Щоб виключити з розгляду невідомі реакції \vec{R}_A, \vec{R}_B , запишемо третє рівняння системи (6.14):

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z (\vec{F}_k^e) = M_z^e. \quad (6.21)$$

Оскільки відповідно до формули (6.9) $L_z = I_z \omega_z$, з рівняння (6.21) отримаємо:

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z^e \quad (6.22)$$

або

$$I_z \ddot{\phi} = M_z^e, \quad (6.23)$$

де φ – кут повороту тіла.

Порівнюючи останнє рівняння з диференціальними рівняннями

руху центру мас (5.23), які застосовують для опису поступального руху тіла, приходимо до висновку про аналогічність структур цих рівнянь. Оскільки маса характеризує інертність тіла, що здійснює поступальний рух, момент інерції I_z є мірою інертності тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

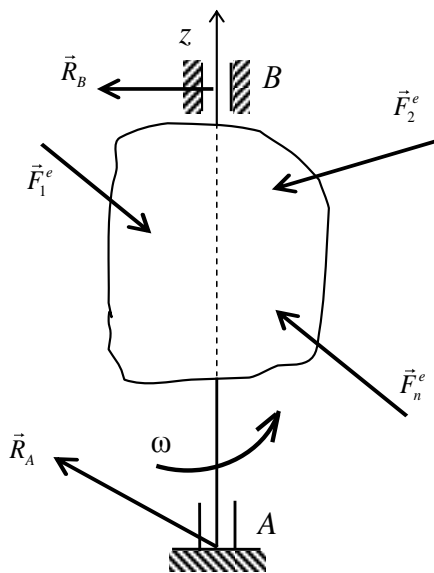


Рисунок 6.6

Розглянемо як приклад рух фізичного маятника, тобто тіла, що має горизонтальну вісь обертання, яка не проходить через центр мас тіла C (рис. 6.7). Позначимо через \vec{G} силу ваги фізичного маятника, \vec{N}_O – реакцію його осі, h – відстань від осі обертання до центра мас тіла.

Поєднаємо вісь z з віссю обертання тіла і запишемо диференціальне рівняння обертального руху:

$$I_z \ddot{\varphi} = -Gh \sin \varphi$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{Gh}{I_z} \sin \varphi = 0, \quad (6.24)$$

де I_z – момент інерції фізичного маятника відносно осі обертання.

Розглянемо малі коливання, при яких $\sin \varphi \approx \varphi$. Рівняння (6.24) набуде вигляду:

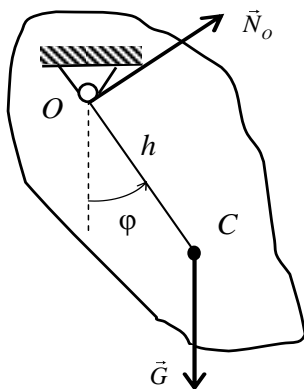


Рисунок 6.7

$$\ddot{\varphi} + \frac{Gh}{I_z} \varphi = 0$$

або

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad (6.25)$$

де $k^2 = \frac{Gh}{I_z}$. Отримане рівняння збігається з рівнянням (2.2), що описує

вільні коливання матеріальної точки в середовищі без опору. Таким чином, малі вільні коливання фізичного маятника є гармонійними

$$\varphi = A \sin(kt + \alpha),$$

де сталі A і α визначають з початкових умов, а період цих коливань знаходять за формулою

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Gh}}.$$

Питання для самоконтролю

1. Як визначити кінетичний момент матеріальної точки і механічної системи?
2. Чому дорівнює кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання?
3. Як сформулювати теореми про зміну кінетичного моменту матеріальної точки і механічної системи?
4. Як сформулювати закон збереження кінетичного моменту механічної системи?
5. Як записати диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла?

Лекція 7. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ

7.1. Кінетична енергія матеріальної точки і механічної системи

Розглянуті в лекціях 5 і 6 міри механічного руху – кількість руху і кінетичний момент – не описують рух системи, що відбувається під дією внутрішніх сил. Наведемо як приклад систему, що складається з двох однакових куль, з'єднаних пружиною (рис. 7.1).

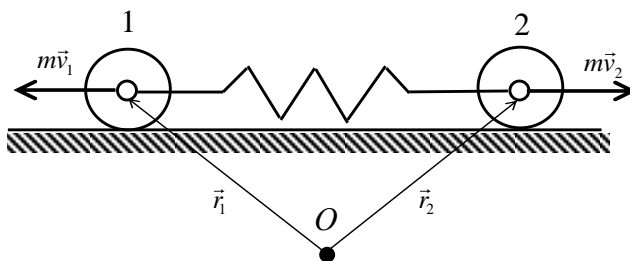


Рисунок 7.1

Стиснемо пружину і відпустимо кулі без початкової швидкості, помістивши їх на гладку горизонтальну площину. Під дією внутрішніх сил (сил пружності пружини) кулі будуть здійснювати коливальний рух, причому в будь-який момент часу їх швидкості будуть рівні за величиною і протилежні за напрямком ($\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$). Кількість руху і кінетичний момент цієї системи відносно довільної нерухомої точки O тотожно дорівнюють нулю і не відображають рух системи:

$$\vec{K} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \equiv 0;$$

$$\vec{L}_O = \vec{M}_O(m\vec{v}_1) + \vec{M}_O(m\vec{v}_2) \equiv 0.$$

Цього недоліку не має розглядувана в даній лекції динамічна характеристика – кінетична енергія.

Кінетична енергія матеріальної точки – це скалярна міра механічного руху, що дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \quad (7.1)$$

Одиниця виміру кінетичної енергії в системі СІ – 1 Дж.

Кінетична енергія механічної системи – це сума кінетичних енергій всіх матеріальних точок, що утворюють систему:

$$T = \sum_{j=1}^N \frac{m_j v_j^2}{2}. \quad (7.2)$$

Кінетична енергія є невід'ємною величиною, вона дорівнює нулю тільки в тому випадку, коли нерухомі всі точки системи. Однак і кінетична енергія не є універсальною мірою руху, оскільки, будучи величиною скалярною, вона не відображає напрямку руху.

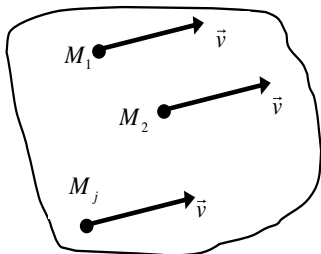
7.2. Кінетична енергія твердого тіла

Отримаємо формули для визначення кінетичної енергії твердого тіла в різних випадках його руху.

7.2.1. Поступальний рух

При цьому виді руху швидкості всіх точок тіла однакові $\vec{v}_j = \vec{v}$

(рис. 7.2). З формули (7.2) випливає:



$$T = \sum_{j=1}^N \frac{m_j v_j^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum_{j=1}^N m_j = \frac{mv^2}{2}, \quad (7.3)$$

де m – маса тіла.

Таким чином, кінетична енергія твердого тіла, що рухається поступально, дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат його швидкості.

Рисунок 7.2

7.2.2. Обертальний рух

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω швидкість точки M_j (рис. 7.3), що знаходиться на відстані h_j від осі обертання, $v_j = \omega h_j$. З формули (7.2) отримаємо:

$$T = \sum_{j=1}^N \frac{m_j v_j^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \omega^2 h_j^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{j=1}^N m_j h_j^2.$$

Тут $\sum_{j=1}^N m_j h_j^2 = I_z$ – момент інерції тіла відносно осі обертання.

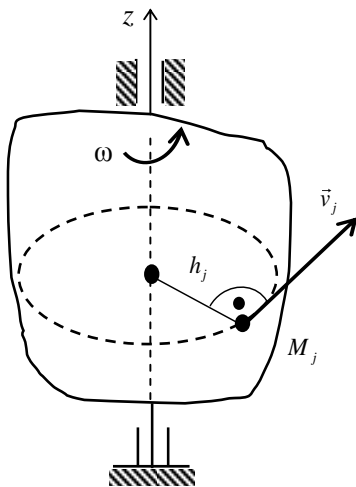


Рисунок 7.3

Тепер остаточно запишемо:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \quad (7.4)$$

тобто кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює половині добутку його моменту інерції відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості тіла.

7.2.3. Плоский рух

Нехай фігура рухається в площині xOy з кутовою швидкістю ω , а її миттєвий центр швидкостей (м.ц.ш.) знаходиться в точці P (рис. 7.4). Тоді швидкість точки M_j , що знаходиться на відстані ρ_j від

м.ц.ш., буде дорівнювати $v_j = \omega \rho_j$.

З формули (7.2) отримаємо:

$$T = \sum_{j=1}^N \frac{m_j v_j^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \omega^2 \rho_j^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{j=1}^N m_j \rho_j^2,$$

де $\sum_{j=1}^N m_j \rho_j^2 = I_{z_p}$ – момент інерції тіла відносно осі z_p , що проходить через м.ц.ш. перпендикулярно площині руху.

Таким чином, кінетична енергія тіла при його плоскому русі

$$T = \frac{1}{2} I_{z_p} \omega^2. \quad (7.5)$$

Безпосереднє використання цієї формули ускладнене тим, що момент інерції I_{z_p} в загальному випадку є змінною величиною. Це пов'язано зі зміною положення м.ц.ш. плоскої фігури в процесі її руху.

Тому отримаємо інше співвідношення, що містить сталий момент інерції, для чого проведемо через центр мас C плоскої фігури вісь $z_c \parallel z_p$ і використаємо формулу (4.12):

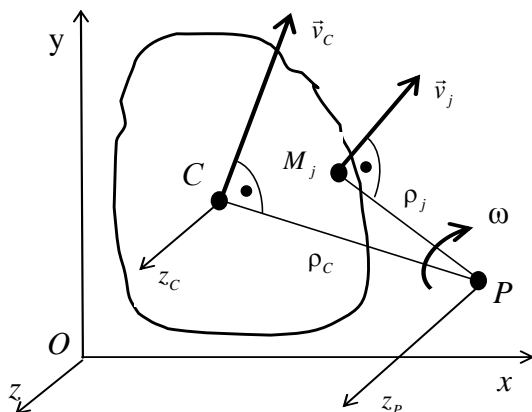


Рисунок 7.4

$$I_{z_p} = I_{z_c} + m\rho_c^2. \quad (7.6)$$

З формул (7.5) і (7.6) випливає:

$$T = \frac{1}{2}(I_{z_c} + m\rho_c^2)\omega^2 = \frac{1}{2}m\rho_c^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_{z_c}\omega^2.$$

Вісь z_c не змінює своє положення відносно тіла, тому момент інерції

I_{z_c} не змінюється. Враховуючи, що швидкість центру мас $v_c = \omega\rho_c$, остаточно отримаємо:

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_{z_c}\omega^2. \quad (7.7)$$

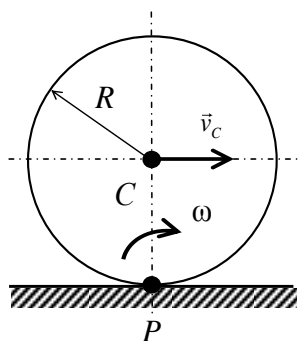


Рисунок 7.5

Таким чином, кінетична енергія тіла, що здійснює плоский рух, дорівнює сумі кінетичної енергії поступального руху зі швидкістю центру мас і кінетичної енергії обертального руху навколо осі, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно площині руху.

Приклад 1. Визначити кінетичну енергію круглого однорідного циліндра, який котиться без ковзання по

нерухомій площині (рис. 7.5). Маса циліндра дорівнює m , швидкість його центру мас v_C . Миттєвий центр швидкостей циліндра знаходиться в точці P торкання циліндра і нерухомої площини, тому його кутова швидкість

$$\omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{v_C}{R}.$$

Момент інерції циліндра відносно поздовжньої осі $I_{z_C} = \frac{mR^2}{2}$. З формули (7.7) отримаємо:

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{v_C^2}{R^2} = \frac{3}{4}mv_C^2. \quad (7.8)$$

7.3. Робота сили і її потужність

Для кількісного опису результату дії сили при переміщенні точки її прикладення використовують поняття *роботи сили*. Нехай точка прикладення сили \vec{F} отримала елементарне переміщення $d\vec{r}$ (рис. 7.6). Елементарна робота сили – це скалярна міра її дії, що дорівнює скалярному добутку сили на елементарне переміщення точки її прикладення:

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (7.9)$$

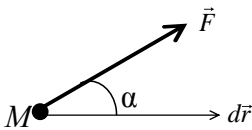


Рисунок 7.6

Штрих в позначенні елементарної роботи використовують у зв'язку з тим, що вона в загальному випадку не є повним диференціалом деякої функції координат точки прикладення сили.

Одиниця виміру роботи в системі СІ – $1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ Дж}$.

Введемо в розгляд швидкість \vec{v} точки прикладення сили \vec{F} і позначимо через α кут між векторами \vec{F} і $d\vec{r}$. Тоді, враховуючи, що $d\vec{r} = \vec{v}dt$, з рівності (7.9) отримаємо

$$d'A = Fdr \cos \alpha = Fv \cos \alpha dt. \quad (7.10)$$

Таким чином, елементарна робота сили при $F \neq 0$ і $v \neq 0$ в залежності від кута α може бути як додатною $\left(0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, так і від'ємною $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi\right)$, а також рівною нулю $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$.

Позначимо проекції сили \vec{F} на координатні осі x, y, z через F_x, F_y, F_z , а проекції вектора елементарного переміщення $d\vec{r}$ на ті ж осі – через dx, dy, dz , тоді елементарна робота

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (7.11)$$

Тепер розглянемо кінцеве переміщення точки прикладення сили, при якому вона рухається по дузі $M_1 M_2$ (рис. 7.7), і будемо вважати, що сила залежить тільки від координат цієї точки. Робота сили на переміщенні $M_1 M_2$ буде дорівнювати криволінійному інтегралу від елементарної роботи:

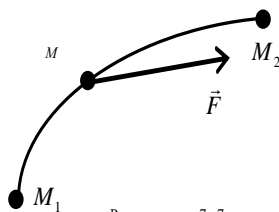


Рисунок 7.7

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (7.12)$$

Якщо відомий закон руху точки

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

то, замінюючи в рівнянні (7.12) проекції сили F_x, F_y, F_z відомими функціями часу $F_x(t), F_y(t), F_z(t)$ і враховуючи, що

$$dx = \dot{x}dt, \quad dy = \dot{y}dt, \quad dz = \dot{z}dt,$$

приходимо до визначеного інтегралу

$$A = \int_{t_1}^{t_2} [F_x(t) \dot{x}(t) + F_y(t) \dot{y}(t) + F_z(t) \dot{z}(t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt, \quad (7.13)$$

де t_1 і t_2 – моменти проходження точки прикладення сили через точки M_1 і M_2 .

Потужність сили визначимо як швидкість зміни роботи в даний момент часу:

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{d'A}{dt} = Fv \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (7.14)$$

тобто потужність сили – це величина, що дорівнює скалярному добутку сили на швидкість точки її прикладення. Тепер формулу (7.13) можна переписати у вигляді:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt. \quad (7.15)$$

Одиниця виміру потужності в системі СІ – 1 Вт = 1 Дж/с.

7.4. Визначення робіт деяких сил

7.4.1. Робота сили ваги

Припустимо, що центр мас C деякого тіла переміщується з положення C_1 в положення C_2 (рис. 7.8), причому розміри самого тіла і траєкторії C_1C_2 малі в порівнянні з радіусом Землі і тіло рухається поблизу її поверхні. У цьому випадку модуль і напрямок рівнодійної сил ваги \vec{G} сталі, а центр мас збігається з центром ваги.

Введемо координатну систему $Oxyz$, направивши вісь z вертикально вгору. Проекції сили ваги на осі x , y , z дорівнюють

$$G_x = 0, \quad G_y = 0, \quad G_z = -G = -mg,$$

а її елементарну роботу визначимо за формулою (7.11)

$$d'A = G_z dz = -mg dz,$$

звідки отримаємо повну роботу

$$A = \int_{z_1}^{z_2} (-mg dz) = mg(z_1 - z_2).$$

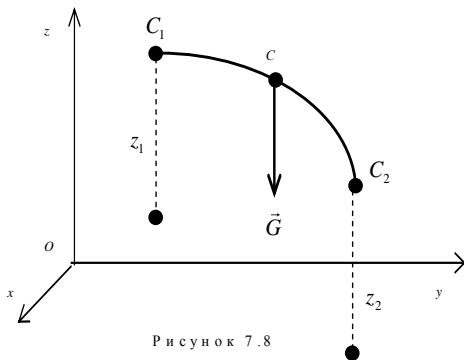


Рисунок 7.8

Позначивши вертикальне переміщення центру ваги через $h = |z_1 - z_2|$, знайдемо

$$A = \pm mgh, \quad (7.16)$$

де знак «плюс» відповідає переміщенню центру ваги униз ($z_1 > z_2$), а знак «мінус» – переміщенню вгору ($z_1 < z_2$). Якщо початкове і

кінцеве положення центру ваги знаходяться на одній горизонтальній площині ($z_1 = z_2$), то робота сили ваги дорівнює нулю.

Таким чином, робота сили ваги не залежить від виду траєкторії центру ваги тіла і визначається тільки його вертикальним переміщенням.

7.4.2. Робота сили пружності

Нехай вантаж M , з'єднаний з пружиною, інший кінець якої закріплений нерухомо (рис. 7.9), переміщається з положення M_1 в положення M_2 уздовж осі пружини, по якій направимо вісь x . За початок координат приймемо положення кінця недеформованої пружини, тоді координата x дорівнює деформації пружини.

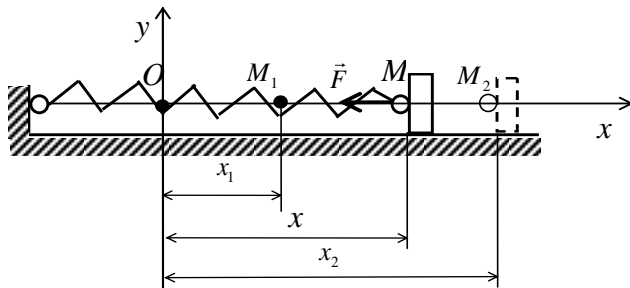


Рисунок 7.9

На вантаж діє сила пружності пружини \vec{F} , її проекції на координатні осі: $F_x = -cx$, $F_y = 0$, $F_z = 0$, де c – жорсткість пружини. Елементарна робота сили пружності відповідно до формули (7.11)

$$d'A = F_x dx = -cxdx,$$

повна робота на розглядуваному переміщенні

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (-cx) dx = \frac{c}{2} (x_1^2 - x_2^2), \quad (7.17)$$

де x_1, x_2 – початкова та кінцева деформації пружини.

З отриманої формули випливає, що робота сили пружності додатна, якщо початкова деформація більше кінцевої за модулем, і від'ємна в іншому випадку. Вона залежить тільки від початкового і кінцевого положень вантажу M .

7.4.3. Робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі

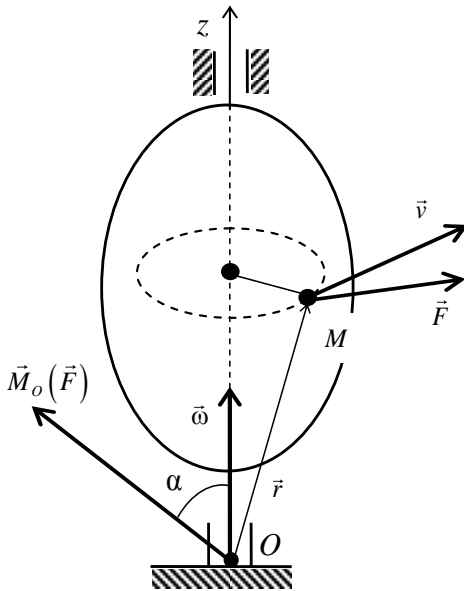


Рисунок 7.10

Нехай до точки M твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, прикладена сила \vec{F} (рис. 7.10). Елементарна робота цієї сили:

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt. \quad (7.18)$$

Введемо радіус-вектор \vec{r} точки M відносно точки O , що лежить на осі обертання, тоді швидкість точки M можна визначити за формулою Ейлера

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Перетворимо формулу (7.18), використовуючи властивість мішаного добутку векторів:

$$d'A = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) dt.$$

Але добуток $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O(\vec{F})$ – це момент сили \vec{F} відносно точки O , тому

$$d'A = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O(\vec{F}) dt = \omega M_O(\vec{F}) \cos \alpha dt.$$

Врахуємо, що $M_O(\vec{F}) \cos \alpha = M_z(\vec{F})$ – момент сили \vec{F} відносно осі z , а $\omega dt = d\varphi$ – елементарний кут повороту тіла, тоді отримаємо

$$d'A = M_z(\vec{F}) d\varphi. \quad (7.19)$$

Таким чином, елементарна робота дорівнює добутку моменту сили відносно осі обертання на елементарний кут повороту тіла. Робота сили \vec{F} на кінцевому переміщенні тіла

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\vec{F}) d\varphi. \quad (7.20)$$

Якщо $M_z(\vec{F}) = \text{const}$, то

$$A = M_z(\vec{F})(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (7.21)$$

тобто робота дорівнює добутку моменту сили відносно осі обертання на кут повороту тіла.

7.4.4. Робота сталої сили

Розглянемо переміщення точки прикладення сталої сили \vec{F} по дузі M_1M_2 (рис. 7.11). Радіуси-вектори \vec{r}_1 і \vec{r}_2 визначають початок і кінець траєкторії відносно нерухомої точки O .

Для визначення роботи сили \vec{F} використаємо формулу (7.13), де покладемо $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$,

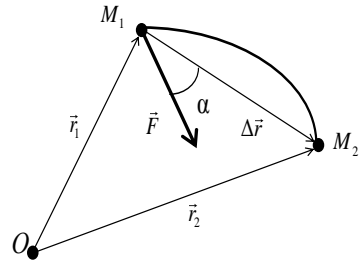


Рисунок 7.11

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{F} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

Враховуючи, що $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}$, остаточно отримаємо:

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\Delta r \cos \alpha, \quad (7.21)$$

тобто для сталої сили робота обчислюється так само, як і при прямолінійному переміщенні точки її прикладення уздовж хорди, що стягує дугу M_1M_2 .

7.4.5. Робота внутрішніх сил твердого тіла

Розглянемо точки M_1 і M_2 твердого тіла, які діють одна на одну з силами \vec{F}_1^i і \vec{F}_2^i (рис. 7.12), причому за законом рівності дії і протидії $\vec{F}_2^i = -\vec{F}_1^i$.

Нехай точки M_1 і M_2 отримали елементарні переміщення $d\vec{r}_1$ і $d\vec{r}_2$. Обчислимо суму елементарних робіт:

$$\begin{aligned} d'A^i &= \vec{F}_1^i \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2^i \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_1^i \cdot \vec{v}_1 dt - \vec{F}_1^i \cdot \vec{v}_2 dt = \\ &= F_1^i v_1 \cos \alpha dt - F_1^i v_2 \cos \beta dt = F_1^i (v_1 \cos \alpha - v_2 \cos \beta) dt, \end{aligned}$$

де \vec{v}_1, \vec{v}_2 – швидкості точок M_1 і M_2 .

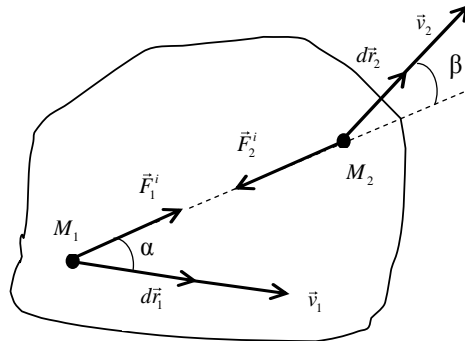


Рисунок 7.12

Відповідно до теореми про проекції швидкостей двох точок твердого тіла $v_1 \cos \alpha = v_2 \cos \beta$ і $d'A^i = 0$. Врахуємо, що кожній внутрішній силі відповідає інша сила, рівна їй за модулем і протилежна за напрямком, тоді сума елементарних робіт всіх внутрішніх сил дорів-

нює нулю. Скінченне переміщення тіла складається з його елементарних переміщень і тому сума робіт всіх внутрішніх сил твердого тіла на будь-якому його переміщенні дорівнює нулю:

$$A^i = \sum_{j=1}^N A_j^i = 0.$$

7.4.6. Робота сил опору коченню

Розглянемо циліндричний коток, який рухається по горизонтальній площині без ковзання (рис. 7.13). Виникнення опору коченню пов'язано з деформаціями дотичних поверхонь, через що лінія дії нормальної складової \vec{N} рівнодіючої реактивних сил виявляється зміщеною у бік руху котка на деяку відстань δ від лінії дії сили ваги \vec{G} . Сили (\vec{N}, \vec{G}) утворюють пару сил опору коченню. Момент цієї пари називають *моментом опору коченню*. Його модуль дорівнює добутку модуля нормальної реакції на плече пари δ , зване *коефіцієнтом тертя кочення*

$$M_c = N\delta. \quad (7.22)$$

Цей коефіцієнт вимірюється в одиницях довжини.

Нехай центр котка отримав елементарне переміщення $d\vec{S}_c$, тоді коток повернувся на кут $d\varphi = \frac{dS_c}{R}$ і елементарна робота пари сил опору коченню

$$d'A = -M_c d\varphi = -N\delta \frac{dS_c}{R}. \quad (7.23)$$

При скінченному переміщенні центру котка на відстань S_c робота сил опору коченню

$$A = -N\delta \frac{S_c}{R}. \quad (7.24)$$

Елементарна робота горизонтальної складової рівнодіючої реактивних сил (сили зчеплення $\vec{F}_{зч}$), яку можна вважати прикладеною в миттєвому центрі швидкостей котка P , дорівнює нулю, тому що швидкість цієї точки $v_p = 0$ і її елементарне переміщення $d\vec{S}_p = \vec{v}_p dt = 0$. Оскільки повна робота дорівнює сумі елементарних робіт, приходимо до наступного висновку: сила зчеплення в розглянутому випадку кочення без ковзання роботу не виконує.

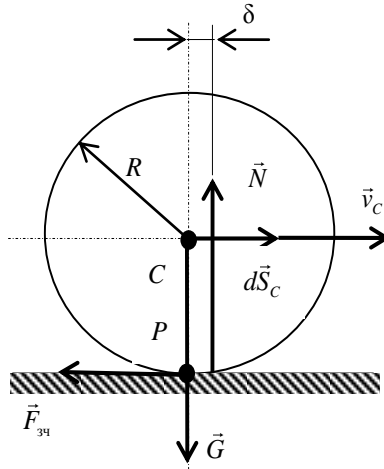


Рисунок 7.13

7.5. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Розглянемо матеріальну точку, що рухається під дією системи сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$, і запишемо для неї основне рівняння динаміки (1.2):

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

Помножимо скалярно обидві частини цієї рівності на вектор елементарного переміщення точки $d\vec{r}$

$$m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot d\vec{r}. \quad (7.25)$$

Перетворимо ліву частину отриманого рівняння:

$$m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dT.$$

Враховуючи, що в правій частині рівняння (7.25) добутки $\vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k$ являють собою елементарні роботи сил $d'A_k$, отримаємо:

$$dT = \sum_{k=1}^n d'A_k .$$

Розділимо цю рівність на величину dt і з урахуванням (7.14) запишемо

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k . \quad (7.26)$$

Співвідношення (7.26) дозволяє сформулювати **теорему про зміну кінетичної енергії** в диференціальній формі. *Похідна за часом від кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює сумі потужностей всіх діючих на неї сил.*

Інтегруючи рівність (7.26), отримаємо:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^n A_k , \quad (7.27)$$

де T_2, T_1 – значення кінетичної енергії в кінцевому і початковому положеннях точки. Таким чином, доведено **теорему про зміну кінетичної енергії** в інтегральній формі. *Зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому її переміщенні дорівнює сумі робіт всіх діючих на точку сил на тому ж переміщенні.*

Приклад 2. Вантаж B масою m , прикріплений до кінця недеформованої пружини жорсткістю c , отримавши початкову швидкість v_1 , рухається вгору по похилій площині, що утворює кут α з горизонтом (рис. 7.14, *a*). Визначити початкову швидкість вантажу, якщо максимальна деформація пружини дорівнює S , а коефіцієнт тертя дорівнює f .

Приймемо вантаж за матеріальну точку і покажемо діючі на нього сили: силу ваги \vec{G} , нормальну реакцію площини \vec{N} , силу тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$ і силу пружності пружини \vec{F} (рис. 7.14, *б*). Розглянемо зміну кінетичної енергії вантажу на переміщенні B_1B_2 , що дорівнює максимальній деформації пружини. У відповідності з рівнянням (7.27) отримаємо:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_G + A_N + A_{F_{\text{тр}}} + A_F , \quad (7.28)$$

де кінцева швидкість вантажу $v_2 = 0$, а роботи сил визначимо за формулами (7.16), (7.21) і (7.17):

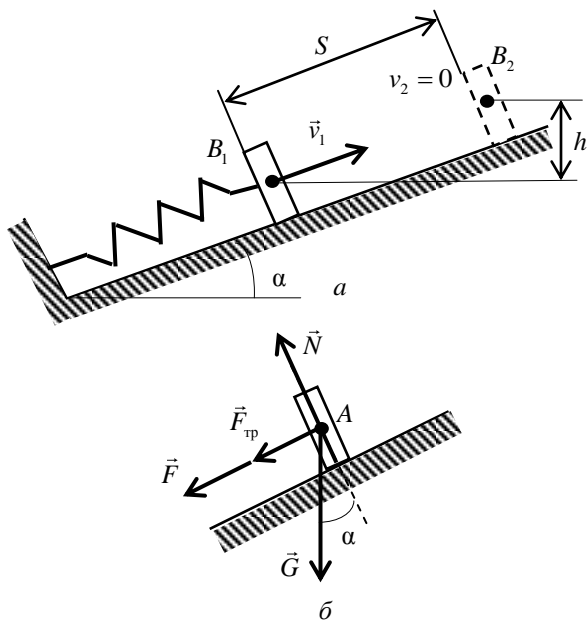


Рисунок 7.14

$$A_G = -mgh = -mgS \sin \alpha ;$$

$$A_N = NS \cos \frac{\pi}{2} = 0 ;$$

$$A_{F_{\text{тр}}} = F_{\text{тр}} S \cos \pi = -F_{\text{тр}} S = -fNS = -fmg \cos \alpha \cdot S ;$$

$$A_F = \frac{c}{2} (x_1^2 - x_2^2),$$

де x_1, x_2 – початкова та кінцева деформації пружини. Оскільки $x_1 = 0, x_2 = S$, отримаємо, що $A_F = -\frac{c}{2} S^2$. Тепер з рівняння (7.28) визначимо початкову швидкість вантажу:

$$-\frac{mv_1^2}{2} = -mgS \sin \alpha - fmgS \cos \alpha - \frac{c}{2} S^2 ;$$

$$v_1 = \sqrt{2gS(\sin \alpha + f \cos \alpha) + \frac{cS^2}{m}} .$$

7.6. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

Розглянемо деяке переміщення системи, що складається з N матеріальних точок, і запишемо для кожної з них співвідношення (7.27):

$$T_{2j} - T_{1j} = A_j^e + A_j^i, \quad j = \overline{1, N}, \quad (7.29)$$

де A_j^e, A_j^i – суми робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на j -у точку системи. Складемо почленно рівняння (7.29):

$$\sum_{j=1}^N T_{2j} - \sum_{j=1}^N T_{1j} = \sum_{j=1}^N A_j^e + \sum_{j=1}^N A_j^i. \quad (7.30)$$

Враховуючи, що

$$\sum_{j=1}^N T_{1j} = T_1, \quad \sum_{j=1}^N T_{2j} = T_2,$$

де T_1 і T_2 – значення кінетичної енергії системи в початковому і кінцевому положеннях, з рівності (7.30) отримаємо:

$$T_2 - T_1 = \sum_{j=1}^N A_j^e + \sum_{j=1}^N A_j^i. \quad (7.31)$$

Це рівняння виражає **теорему про зміну кінетичної енергії системи** в інтегральній формі. *Зміна кінетичної енергії механічної системи на деякому її переміщенні дорівнює сумі робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на точки системи, на тому ж переміщенні.*

Покладемо в рівнянні (7.31) $T_2 = T$, де T – кінетична енергія системи в поточному положенні, і продиференціюємо його за часом. Тоді, враховуючи (7.15), де $t_2 = t$, отримаємо:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^N N_j^e + \sum_{j=1}^N N_j^i. \quad (7.32)$$

Таким чином, отримана диференціальна форма **теореми**. *Похідна за часом від кінетичної енергії системи дорівнює сумі потужностей всіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на точки системи.*

Співвідношення (7.31) і (7.32), на відміну від раніше розглянутих загальних теорем динаміки, описують залежність зміни кінетичної енергії від внутрішніх сил. Однак найчастіше механічні системи моделюють твердими тілами, з'єднаними між собою за допомогою внутрішніх в'язей. Ці в'язі реалізуються у вигляді шарнірів без тертя, гнучких нерозтяжних ниток або здійснюються за рахунок відносного ковчання без проковзування. Такі системи називають *незмінними*. Сума робіт (і потужностей) внутрішніх сил незмінної системи дорівнює нулю, а співвідношення (7.31) і (7.32) приймають вигляд:

$$T_2 - T_1 = \sum_{j=1}^N A_j^e; \quad (7.33)$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^N N_j^e. \quad (7.34)$$

Приклад 3. Механізм, розташований у вертикальній площині, починає рух зі стану спокою під дією сил ваги (положення зліва, рис. 7.15). Вантаж 1, опускаючись вниз, приводить в рух шків 2 і шарнірно з ним пов'язаний шатун 3, а повзун 4 рухається уздовж вертикальних напрямних.

Визначити швидкість v_1 вантажу 1 в момент, коли шків повернувся на кут π рад (положення праворуч, рис. 7.15), вважаючи шків однорідним циліндром радіусом R , а шатун – однорідним стержнем; $r = 0,5 R$. Маса тіл прийняти наступними: $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $m_4 = 0,5m$. Опором руху знехтувати.

Система складається з твердих тіл, з'єднаних шарнірами без тертя і гнучким нерозтяжним тросом, масою якого нехтуємо, тому сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю. Рух системи починається із стану спокою, тому початкова кінетична енергія $T_1 = 0$ і з рівняння (7.33) отримаємо:

$$T_2 = \sum_{j=1}^N A_j^e. \quad (7.35)$$

Кінетична енергія системи в кінцевому положенні дорівнює сумі кінетичних енергій всіх тіл, що входять до складу системи:

$$T_2 = T_{21} + T_{22} + T_{23} + T_{24}. \quad (7.36)$$

Вантаж 1 рухається поступально, шків 2 обертається навколо нерухомої осі. Їх кінетичні енергії:

$$T_{21} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m v_1^2; \quad T_{22} = \frac{1}{2} I_{z_2} \omega_2^2. \quad (7.37)$$

Повзун 4 також рухається поступально, але в кінцевому положенні системи (див. рис. 7.15, праворуч) займає крайнє нижнє положення, тому його швидкість $v_4 = 0$ і кінетична енергія $T_{24} = 0$. Точка B_1 є миттєвим центром швидкостей шатуна 3, який здійснює плоский рух. Їого кінетичну енергію визначимо за формулою (7.5)

$$T_{23} = \frac{1}{2} I_{z_3} \omega_3^2. \quad (7.38)$$

Моменти інерції шківів 2 і шатуна 3 (однорідних тіл) обчислимо за формулами (4.15) і (4.13):

$$I_{z_2} = \frac{1}{2} m_2 R^2 = \frac{1}{2} m R^2; \quad I_{z_3} = \frac{1}{3} m_3 l^2 = \frac{1}{3} m l^2, \quad (7.39)$$

де l – довжина шатуна.

Кутова швидкість шківів $\omega_2 = \frac{v_1}{R}$, швидкість точки A

$$v_A = \omega_2 r = \frac{v_1}{R} \cdot 0,5R = 0,5v_1.$$

Кутова швидкість шатуна

$$\omega_3 = \frac{v_A}{A_1 B_1} = \frac{0,5v_1}{l} = \frac{v_1}{2l}.$$

З формул (7.36) - (7.39) отримаємо:

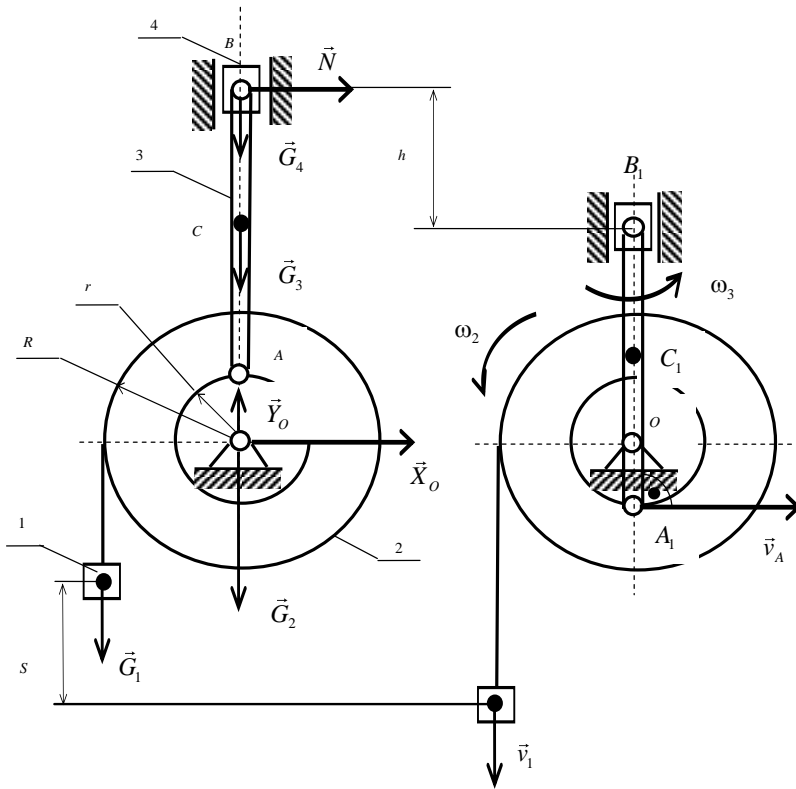


Рисунок 7.15

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{v_1^2}{R^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}ml^2 \cdot \frac{v_1^2}{4l^2} = \frac{19}{24}mv_1^2. \quad (7.40)$$

Розглянемо зовнішні сили, що діють на систему. Це сили ваги $\vec{G}_1, \dots, \vec{G}_4$, реакція осі шків, яку представимо складовими \vec{X}_O, \vec{Y}_O , і нормальна реакція \vec{N} гладких напрямних повзуна. З них роботу не виконують сили $\vec{G}_2, \vec{X}_O, \vec{Y}_O$, прикладені в нерухомій точці O , і сила \vec{N} , напрямлена перпендикулярно переміщенню точки B . Таким чином, сума робіт зовнішніх сил

$$\sum_{j=1}^N A_j^e = A_{G_1} + A_{G_3} + A_{G_4}. \quad (7.41)$$

Роботи сил ваги визначимо за формулою (7.16):

$$A_{G_1} = m_1 g S = mgS ;$$

$$A_{G_3} = m_3 gh = mgh ;$$

$$A_{G_4} = m_4 gh = 0,5mgh .$$

Обчисливши переміщення центрів ваги тіл $S = \pi R$, $h = 2r = R$, отримаємо суму робіт зовнішніх сил:

$$\sum_{j=1}^N A_j^e = mg\pi R + mgR + 0,5mgR = mgR(1,5 + \pi) . \quad (7.42)$$

Тепер, підставивши (7.40) і (7.42) в рівняння (7.35), обчислимо швидкість вантажу 1:

$$\frac{19}{24} mv_1^2 = mgR(1,5 + \pi); \quad v_1 = \sqrt{\frac{24}{19} gR(1,5 + \pi)} .$$

Питання для самоконтролю

1. Як визначити кінетичну енергію матеріальної точки і механічної системи?
2. Чому дорівнює кінетична енергія твердого тіла при поступальному, обертовому та плоскому рухах?
3. Як визначити елементарну роботу сили і роботу сили на скінченному переміщенні точки її прикладення?
4. Чому дорівнює робота сили ваги?
5. Чому дорівнює робота сили пружності?
6. Від чого залежить робота сили, прикладеної до обертового тіла?
7. Чи залежить робота сталої сили від траєкторії точки її прикладення?
8. Чому дорівнює робота внутрішніх сил твердого тіла?
9. Як визначити роботу сил опору коченню?
10. Як визначити потужність сили?
11. Як сформулювати теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки і механічної системи?

Лекція 8. МЕТОД КІНЕТОСТАТИКИ

8.1. Сила інерції і принцип Даламбера для матеріальної точки

Методом кінетостатики називають загальний метод розв'язання задач динаміки, при використанні якого рівняння руху приймають вид рівнянь рівноваги статки.

Розглянемо матеріальну точку, що рухається під дією системи сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$, і запишемо для неї основне рівняння динаміки:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

Введемо в розгляд вектор

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}, \quad (8.1)$$

напрявлений протилежно прискоренню точки і рівний за величиною добутку маси точки на модуль її прискорення. Цей вектор називають *силою інерції матеріальної точки*. Тепер основному рівнянню динаміки точки можна надати наступний вигляд:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \vec{\Phi} = 0. \quad (8.2)$$

Прикладемо умовно силу інерції до матеріальної точки, тоді рівняння (8.2) буде представляти собою необхідну і достатню умову рівноваги збіжної системи сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n, \vec{\Phi})$. Ця умова є змістом **принципу Даламбера для матеріальної точки**. *Якщо до рухомої матеріальної точки умовно прикласти силу інерції, то в будь-який момент часу сили, що діють на точку, і сила інерції утворюють зрівноважену систему сил.*

Рівняннями методу кінетостатики в даному випадку є рівняння рівноваги отриманої збіжної системи сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} + \Phi_x = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} + \Phi_y = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} + \Phi_z = 0. \quad (8.3)$$

Слід зазначити, що метод кінетостатики є тільки прийомом, що дозволяє використовувати рівняння рівноваги, відомі зі статки, для розв'язання задач динаміки. Вони являють собою перетворені рівняння руху, проте таке перетворення значно полегшує розв'язання

багатьох практичних задач, завдяки чому метод кінетостатики знайшов широке застосування в прикладних дисциплінах.

Приклад 1. Вантаж M масою m , підвішений на тросі довжиною l до нерухомої точки O (рис. 8.1), являє собою конічний маятник, тобто він описує коло у горизонтальній площині.

Визначити швидкість вантажу і силу натягу троса, який утворює кут α з вертикаллю.

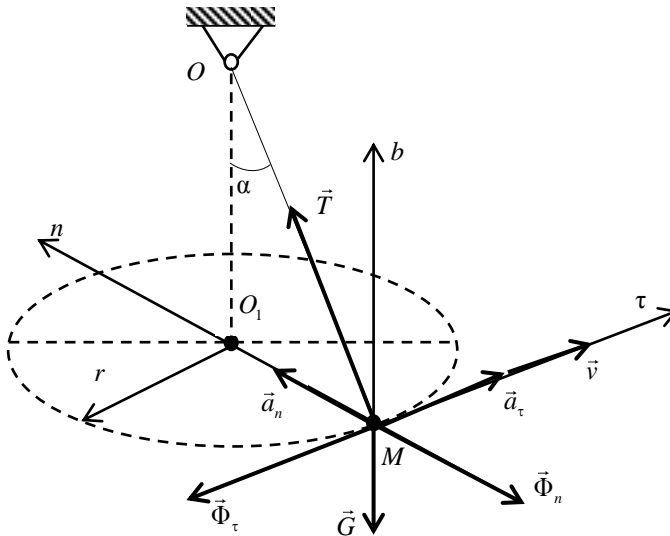


Рисунок 8.1

Приймемо вантаж за матеріальну точку і покажемо діючі на нього сили: силу ваги $\vec{G} = m\vec{g}$ і реакцію троса \vec{T} . Точка M рухається по колу радіусом $r = OM \sin \alpha = l \sin \alpha$, її прискорення представимо дотичною \vec{a}_τ і нормальною \vec{a}_n складовими, внаслідок чого сила інерції також буде мати дві складові:

$$\vec{\Phi}_\tau = -m\vec{a}_\tau, \quad \vec{\Phi}_n = -m\vec{a}_n,$$

модулі яких

$$\Phi_\tau = m \frac{dv}{dt}, \quad \Phi_n = m \frac{v^2}{r} = m \frac{v^2}{l \sin \alpha}.$$

Умовно прикладемо до точки M сили інерції і отримаємо зрівноважену систему збіжних сил $(\vec{G}, \vec{T}, \vec{\Phi}_\tau, \vec{\Phi}_n)$. Запишемо рівняння рівноваги цієї системи сил в проєкції на осі натуральної системи координат $M\tau nb$:

$$\begin{cases} \sum F_{k\tau} = 0; & -\Phi_\tau = 0; \\ \sum F_{kn} = 0; & T \sin \alpha - \Phi_n = 0; \\ \sum F_{kb} = 0; & T \cos \alpha - G = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння випливає, що $\Phi_\tau = m \frac{dv}{dt} = 0$, тобто швидкість точки M не змінюється за величиною: $v = \text{const}$. З третього рівняння одержимо:

$$T = \frac{G}{\cos \alpha} = \frac{mg}{\cos \alpha}.$$

Тепер перетворимо друге рівняння

$$\Phi_n = T \sin \alpha; \quad m \frac{v^2}{l \sin \alpha} = \frac{mg}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha,$$

звідки $v = \sqrt{gl \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}$.

8.2. Принцип Даламбера для механічної системи

Розглянемо механічну систему, що складається з N матеріальних точок, для кожної з яких запишемо основне рівняння динаміки:

$$m_j \vec{a}_j = \vec{F}_j^e + \vec{F}_j^i, \quad j = \overline{1, N}, \quad (8.4)$$

де, як і раніше, \vec{F}_j^e, \vec{F}_j^i – рівнодійні зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на j -у точку системи.

Введемо сили інерції $\vec{\Phi}_j = -m_j \vec{a}_j$, які умовно прикладемо до відповідних точок системи. Тоді рівняння (8.4) приймуть вигляд:

$$\vec{F}_j^e + \vec{F}_j^i + \vec{\Phi}_j = 0, \quad j = \overline{1, N}. \quad (8.5)$$

Таким чином, отримані системи сил, прикладених до кожної точки механічної системи, зрівноважені, що дозволяє сформулювати **принцип Даламбера для механічної системи**. Якщо до кожної точки рухомої механічної системи умовно прикласти відповідну силу інерції, то в будь-який момент часу сукупність всіх діючих на точки системи зовнішніх і внутрішніх сил, а також сил інерції утворює зрівноважену систему сил.

8.3. Рівняння методу кінестатики для механічної системи

Отримана в результаті використання принципу Даламбера система сил в загальному випадку є довільною просторовою системою. Для її рівноваги необхідно і достатньо, щоб головний вектор системи і її головний момент відносно довільного нерухомого центру дорівнювали нулю:

$$\vec{R} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^e + \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^i + \sum_{j=1}^N \vec{\Phi}_j = 0; \quad (8.6)$$

$$\vec{M}_O = \sum_{j=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_j^e) + \sum_{j=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_j^i) + \sum_{j=1}^N \vec{M}_O(\vec{\Phi}_j) = 0. \quad (8.7)$$

Врахуємо, що головний вектор і головний момент внутрішніх сил відносно довільного центру дорівнюють нулю:

$$\vec{R}^i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^i = 0, \quad \vec{M}_O^i = \sum_{j=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_j^i) = 0,$$

і введемо в розгляд головний вектор \vec{R}^Φ і головний момент \vec{M}_O^Φ сил інерції:

$$\vec{R}^\Phi = \sum_{j=1}^N \vec{\Phi}_j; \quad \vec{M}_O^\Phi = \sum_{j=1}^N \vec{M}_O(\vec{\Phi}_j). \quad (8.8)$$

Тепер рівняння (8.6) і (8.7) приймуть вигляд:

$$\vec{R}^e + \vec{R}^\Phi = 0; \quad (8.9)$$

$$\vec{M}_O^e + \vec{M}_O^\Phi = 0, \quad (8.10)$$

де $\vec{R}^e = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^e$; $\vec{M}_O^e = \sum_{j=1}^N \vec{M}_O(\vec{F}_j^e)$ – головний вектор і головний момент

зовнішніх сил відносно центру O .

Рівняння методу кінетостатики отримаємо, проєктуючи рівняння (8.9), (8.10) на осі декартової системи координат:

$$R_x^e + R_x^\Phi = 0; \quad R_y^e + R_y^\Phi = 0; \quad R_z^e + R_z^\Phi = 0; \quad (8.11)$$

$$M_x^e + M_x^\Phi = 0; \quad M_y^e + M_y^\Phi = 0; \quad M_z^e + M_z^\Phi = 0.$$

8.4. Головний вектор і головний момент сил інерції

Отримаємо вирази для головного вектора і головного моменту сил інерції всіх точок механічної системи. На підставі рівняння (8.9) $\vec{R}^\Phi = -\vec{R}^e$. З формули (5.22) теореми про рух центру мас випливає, що $\vec{R}^e = m\vec{a}_C$. Таким чином,

$$\vec{R}^\Phi = -m\vec{a}_C, \quad (8.12)$$

тобто головний вектор сил інерції механічної системи дорівнює взятому з протилежним знаком добутку маси системи на прискорення її центру мас.

Аналогічно, з рівняння (8.10) випливає, що $\vec{M}_O^\Phi = -\vec{M}_O^e$, а з формули (6.13) теореми про зміну кінетичного моменту отримаємо, що

$$\vec{M}_O^e = \frac{d\vec{L}_O}{dt}, \text{ тобто}$$

$$\vec{M}_O^\Phi = -\frac{d\vec{L}_O}{dt}. \quad (8.13)$$

Отже, головний момент сил інерції механічної системи відносно нерухомого центру O дорівнює взятій з протилежним знаком похідній за часом від кінетичного моменту системи відносно того ж центру.

Отримані результати свідчать про те, що рівняння (8.9), (8.10) і рівняння методу кінетостатики (8.11) еквівалентні рівнянням теорем про рух центру мас і про зміну кінетичного моменту. Дійсно, підставляючи в рівняння (8.9), (8.10) формули (8.12), (8.13), отримаємо рівняння (5.22) і (6.13).

8.5. Зведення сил інерції точок твердого тіла до найпростішого вигляду

Головний вектор сил інерції не залежить від вибору центру зведення і при будь-якому русі тіла може бути визначений співвідношенням (8.12). Визначимо головний момент сил інерції для деяких випадків руху твердого тіла.

8.5.1. Поступальний рух

При поступальному русі тіла прискорення всіх його точок в даний момент часу однакові і дорівнюють прискоренню центру мас \vec{a}_C (рис. 8.2).

Сила інерції матеріальної точки M_j масою m_j буде дорівнювати

$$\vec{\Phi}_j = -m_j \vec{a}_j = -m_j \vec{a}_C.$$

Виберемо в якості центру зведення центр мас тіла і обчислимо головний момент сил інерції

$$\begin{aligned} \vec{M}_C^\Phi &= \sum_j \vec{r}_j \times \vec{\Phi}_j = \sum_j \vec{r}_j \times (-m_j \vec{a}_C) = \\ &= - \left(\sum_j m_j \vec{r}_j \right) \times \vec{a}_C = -m \vec{r}_C \times \vec{a}_C = 0, \end{aligned}$$

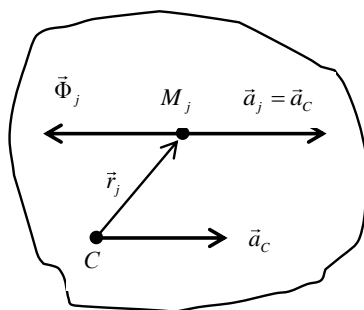


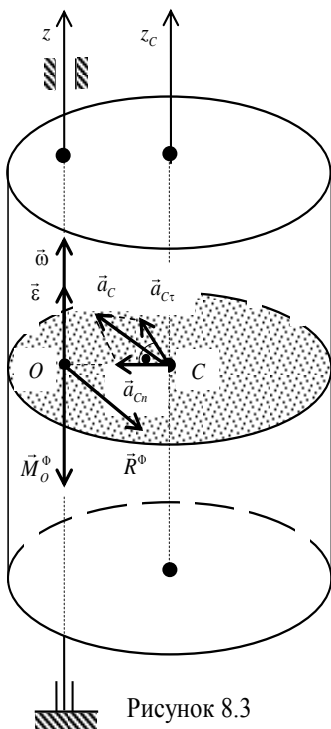
Рисунок 8.2

тому що радіус-вектор центру мас $\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_j m_j \vec{r}_j$ дорівнює нулю.

Таким чином, при поступальному русі тіла сили інерції його точок приводяться до рівнодійної, умовно прикладеної в центрі мас тіла, яка дорівнює головному вектору сил інерції $\vec{R}^\Phi = -m \vec{a}_C$.

8.5.2. Обертання навколо нерухомої осі

Розглянемо тверде тіло, що має площину матеріальної симетрії і обертається навколо нерухомої осі z , яка перпендикулярна цій площині і не проходить через центр мас тіла C (рис. 8.3). Зведемо сили інерції до центру O , в якому вісь обертання перетинає площину симетрії. Тоді, внаслідок симетрії тіла, сила і пара сил, до яких зводять сили інерції, лежать в площині симетрії. Сила дорівнює головному вектору сил інерції $\vec{R}^\Phi = -m \vec{a}_C$.



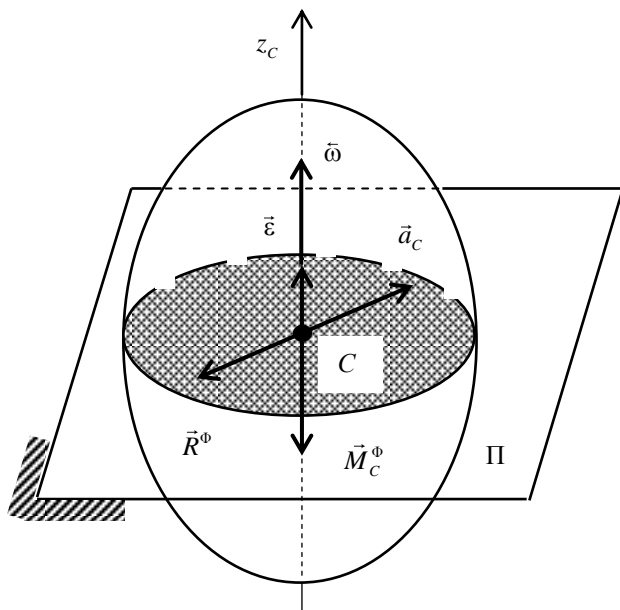


Рисунок 8.4

Приклад 2. Падаючи, вантаж A вагою P розмотує нерозтяжний трос, намотаний на барабан (рис. 8.5).

Визначити складові реакції жорсткого закріплення C і прискорення вантажу, вважаючи барабан однорідним циліндром вагою Q і нехтуючи вагою троса і консольної балки, а також тертям у підшипниках, якщо $BC = b$.

Розглянемо механічну систему, що складається з балки BC , барабана і вантажу A . На неї діють зовнішні сили: сили ваги барабана \vec{Q} і вантажу \vec{P} , а також реакція жорсткого закріплення C , яку представимо складовими $\vec{X}_C, \vec{Y}_C, M_C$. Додамо до них сили інерції, які для вантажу, що рухається поступально, приведемо до сили $\vec{\Phi}$, а для барабана, що має площину матеріальної симетрії і обертається навколо центральної осі, перпендикулярної цій площині – до пари сил з моментом M^Φ . Визначимо модулі сили і пари сил інерції:

$$\Phi = \frac{P}{g} a; \quad M^\Phi = I_B \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} R^2 \cdot \frac{a}{R} = \frac{Q}{2g} Ra,$$

де a – прискорення вантажу; ε – кутове прискорення барабана, $\varepsilon = a/R$.

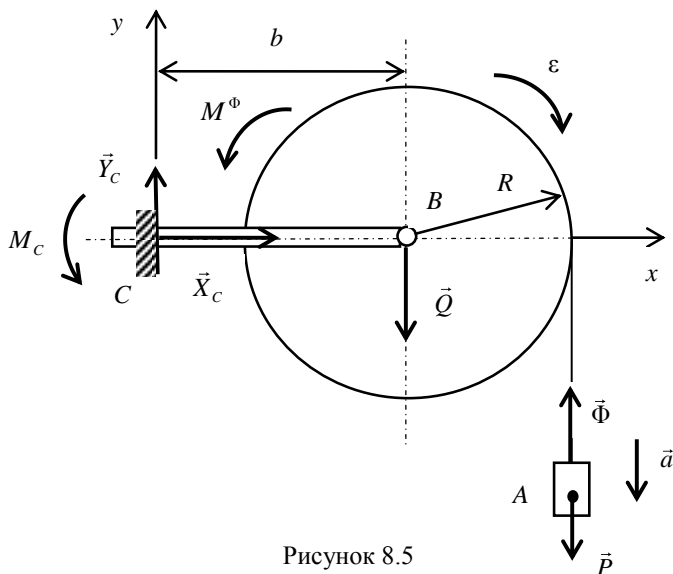


Рисунок 8.5

Відповідно до принципу Даламбера отримана плоска система сил зрівноважена. Запишемо для неї три рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0; \quad X_C = 0; \quad (8.16)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_C - P - Q + \Phi = 0; \quad (8.17)$$

$$\sum M_{iC} = 0; \quad M_C + M^\Phi - Qb - P(b + R) + \Phi(b + R) = 0. \quad (8.18)$$

Для визначення прискорення вантажу A розглянемо систему, що складається з барабана і вантажу (рис. 8.6), на яку діють реакції підшипників \vec{X}_B, \vec{Y}_B , а також перераховані раніше сили ваги і сили інерції. Запишемо одне рівняння рівноваги:

$$\sum M_{iB} = 0; \quad M^\Phi + \Phi R - PR = 0. \quad (8.19)$$

Перетворимо рівняння (8.19) до вигляду:

$$\frac{Q}{2g} Ra + \frac{P}{g} aR - PR = 0,$$

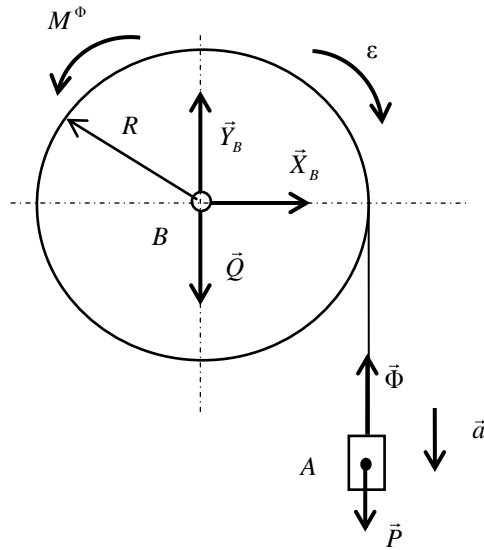


Рисунок 8.6

звідки $a = \frac{2Pg}{2P+Q}$. З рівняння (8.17) отримаємо:

$$Y_c = P + Q - \Phi = P + Q - \frac{P}{g} \cdot \frac{2Pg}{2P+Q} = \frac{3P+Q}{2P+Q} Q.$$

Відніmemo з рівняння (8.18) рівняння (8.19):

$$M_c - Qb - Pb + \Phi b = 0;$$

$$M_c = (P + Q - \Phi)b = Y_c b = \frac{3P+Q}{2P+Q} Qb.$$

Таким чином, невідомі величини визначені:

$$X_c = 0; \quad Y_c = \frac{3P+Q}{2P+Q}Q; \quad M_c = \frac{3P+Q}{2P+Q}Qb; \quad a = \frac{2P}{2P+Q}g.$$

Питання для самоконтролю

1. Чому дорівнює сила інерції матеріальної точки?
2. Як сформулювати принцип Даламбера для матеріальної точки та механічної системи?
3. У чому полягає метод кінетостатики?
4. Як записати рівняння методу кінетостатики для механічної системи?
5. Чому дорівнюють головний вектор і головний момент сил інерції?
6. До якого найпростішого вигляду можна звести сили інерції твердого тіла у випадках його поступального, обертального і плоского рухів?

Лекція 9. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

9.1. Вступ

Розглянуті в попередніх лекціях загальні теореми динаміки і отримані з них наслідки дозволяють розв'язувати більшість задач динаміки механічної системи. Проте їх застосування викликає і певні труднощі. Справа в тому, що неможливо строго класифікувати задачі і вказати, в якому випадку яка теорема є найбільш ефективною. Крім того, для розв'язання деяких задач потрібно одночасно використовувати кілька загальних теорем, а також розбивати систему на частини, вводючи додаткові невідомі величини, визначення яких не є необхідним.

Аналітична механіка вивчає загальні методи складання диференціальних рівнянь руху механічної системи. Їх інтегрування дозволяє визначити рух системи і є, таким чином, загальним методом розв'язання задач динаміки.

Спочатку розглянемо прийняту в аналітичній механіці класифікацію в'язей.

9.2. В'язі та їх класифікація

Систему матеріальних точок називають *вільною*, якщо їх координати і швидкості можуть приймати довільні значення. В іншому випадку систему називають *невільною*. Таким чином, на координати і швидкості точок невільної системи накладені обмеження, які повинні виконуватися при будь-яких діючих на систему силах. Ці обмеження називають *в'язями*, а рівняння, яким повинні задовольняти координати і швидкості точок невільної системи, – *рівняннями в'язей*.

Приклад 1. Дві матеріальні точки, показані на рис. 9.1, з'єднані нерозтяжним стержнем довжиною l . Оскільки відстань між точками не змінюється, рівняння в'язі має вигляд:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2, \quad (9.1)$$

де x_i, y_i, z_i – декартові координати точок.

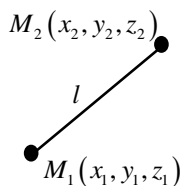


Рисунок 9.1

Приклад 2. Розглянемо ковзан, що рухається поверхнею льоду. Нехай він має опукле лезо, яке торкається льоду в одній точці A

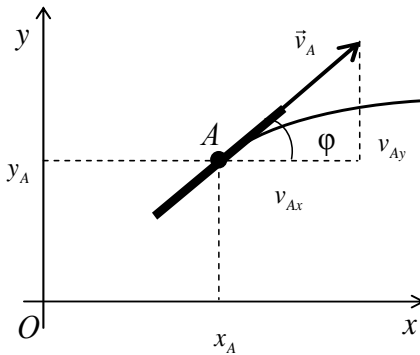


Рисунок 9.2

(рис. 9.2). Задамо положення ковзана трьома координатами: x_A , y_A , φ . Будемо вважати, що точка A не проковзує в напрямку, перпендикулярному лезу, тоді її швидкість v_A напрямлена вздовж леза і справедливе співвідношення

$$\frac{v_{Ay}}{v_{Ax}} = \frac{\dot{y}_A}{\dot{x}_A} = \operatorname{tg} \varphi,$$

з якого отримаємо рівняння в'язі:

$$\dot{y}_A - \dot{x}_A \operatorname{tg} \varphi = 0. \quad (9.2)$$

В'язі, в рівняння яких час явно не входить, називають *стаціонарними* (приклади 1 і 2). Якщо ж час явно входить в рівняння в'язі, то її називають *нестационарною*.

Геометричними називають в'язі, рівняння яких містять тільки координати точок механічної системи і, може бути, час (приклад 1). Якщо, крім того, в рівняння в'язей входять перші похідні від координат за часом, то в'язі називають *диференціальними* (приклад 2).

Геометричні в'язі та ті диференціальні в'язі, рівняння яких можуть бути проінтегровані, називають *голономними* (приклад 1). Диференціальні в'язі, рівняння яких не можуть бути проінтегровані, називають *неголономними* (приклад 2).

По виду в'язей механічні системи поділяють на голономні і неголономні. *Голономною* називають механічну систему, на яку накладені тільки голономні в'язі. В іншому випадку, тобто якщо хоча б одна в'язь є неголономною, систему називають *неголономною*.

І, нарешті, в'язі можуть бути *утримуючими* і *неутримуючими*. Утримуючі в'язі описують рівняннями (приклади 1,2), а неутримуючі – нерівностями.

Приклад 3. Розглянемо дві матеріальні точки, з'єднані нерозтяжною ниткою довжиною l (рис. 9.3). Оскільки відстань між точками не може перевищити довжину нитки, виконується нерівність

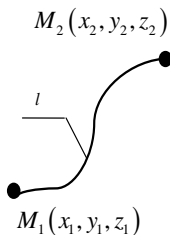


Рисунок 9.3

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \leq l^2, \quad (9.3)$$

що описує дану неутримуючу в'язь.

Таким чином, в'язь має три характеристики:

- 1) стаціонарна або нестаціонарна,
- 2) голономна або неголономна,
- 3) утримуюча або неутримуюча.

Наприклад, в'язь з прикладу 2 є стаціонарною, неголономною і утримуючою.

Далі будемо розглядати тільки голономні утримуючі в'язі.

9.3. Можливі і віртуальні переміщення

Розглянемо одну матеріальну точку, підпорядковану нестаціонарній голономній в'язі, рівняння якої має вигляд:

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad (9.4)$$

де x, y, z – координати точки, t – час. Це рівняння описує поверхню, яка змінюється з плином часу. У силу рівняння (9.4) точка повинна переміщатися по цій поверхні, тому диференціали координат при кінематично можливому переміщенні точки повинні задовольняти співвідношенню

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \quad (9.5)$$

Вектор $d\vec{r}$, який визначається своїми проекціями dx, dy, dz при нескінченно малому часі dt , називають *вектором можливого переміщення точки*.

Зафіксуємо тепер час t в рівнянні (9.4) і розглянемо припустимо в'яззю переміщення матеріальної точки з положення, займаного нею в даний момент часу, в нескінченно близьке положення, яке вона може займати в той же момент часу. Це переміщення виражають ізохронною варіацією радіус-вектора точки $\delta\vec{r}$ і називають *вектором віртуального переміщення*. Варіації координат $\delta x, \delta y, \delta z$ пов'язані співвідношенням

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0, \quad (9.6)$$

яке випливає з рівняння (9.4) при фіксованому часі t .

Неважко помітити, що у разі стаціонарної голономної в'язі віртуальні переміщення збігаються з можливими. Дійсно, рівняння стаціонарної в'язі має вигляд:

$$f(x, y, z) = 0, \quad (9.7)$$

тому $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ і рівняння (9.5), що визначає можливі переміщення, збігається з рівнянням (9.6), яке визначає віртуальні переміщення.

Різницю між можливими і віртуальними переміщеннями для випадку нестаціонарної в'язі розглянемо на наступному прикладі. Нехай ця в'язь являє собою поверхню, яка переміщується щодо нерухомої системи відліку, не деформуючись. Тоді розглядувана точка бере участь у двох рухах: відносному (рух по поверхні) і переносному (разом з поверхнею). Таким чином, траєкторія абсолютного руху точки лежить поза поверхнею, а вектор можливого переміщення $d\vec{r}$ напрямлений по дотичній до цієї траєкторії (рис. 9.4). Вектор віртуального переміщення $\delta\vec{r}$ напрямлений по дотичній до траєкторії відносного руху, що лежить на поверхні, оскільки при визначенні віртуального переміщення час фіксується і переносне переміщення відсутнє.

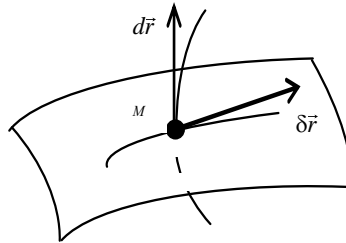


Рисунок 9.4

9.4. Число степенів вільності системи і узагальнені координати

Віртуальним переміщенням механічної системи називають будь-яку сукупність віртуальних переміщень її точок, що допускається всіма накладеними на систему в'язями. Система має безліч різних віртуальних переміщень, з яких можна вибрати незалежні між собою переміщення, а через них виразити будь-яке віртуальне переміщення. Число незалежних між собою віртуальних переміщень механічної системи називають її *числом степенів вільності*.

Розглянемо систему з N матеріальних точок, підпорядковану d голономним в'язям. Положення системи визначається $3N$ декартовими координатами її точок, з яких незалежними будуть $s = 3N - d$. Для голономної системи число незалежних координат збігається з числом степенів вільності.

В якості незалежних координат не обов'язково вибирати декартові координати точок системи. Її положення можна однозначно визначити за допомогою будь-яких незалежних між собою параметрів. Їх називають *узагальненими координатами*.

На рис. 9.5 показаний кривошипно-шатунний механізм, розташований в площині xOy . Положення механізму визначається його точками O, A, B .

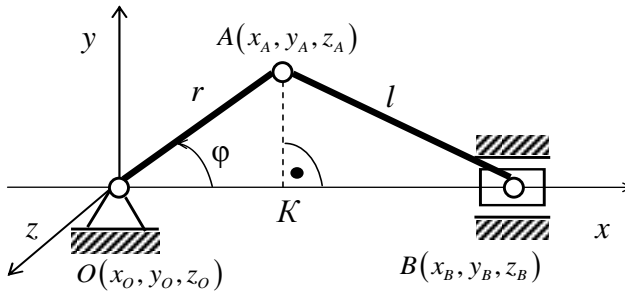


Рисунок 9.5

Позначимо через r і l довжини кривошипа OA і шатуна AB і запишемо рівняння в'язей, накладених на систему:

$$x_O = 0; \quad y_O = 0; \quad z_O = 0; \quad z_A = 0; \quad y_B = 0; \quad z_B = 0;$$

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2; \quad (x_A - x_B)^2 + y_A^2 = l^2.$$

Отже, кількість в'язей $d = 8$, кількість точок системи $N = 3$ і число степенів вільності $s = 3N - d = 1$. Виберемо в якості узагальненої координати кут φ між кривошипом і додатним напрямом осі x і визначимо координати точок системи, що змінюються:

$$x_A = OK = r \cos \varphi; \quad y_A = AK = r \sin \varphi;$$

$$x_B = OK + KB = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}.$$

Таким чином, узагальнена координата φ однозначно визначає положення системи.

9.5. Основна задача динаміки невідільної системи.

Ідеальні в'язі

Розділимо сили, що діють на точки механічної системи, на активні сили \vec{F}_j і реакції в'язей \vec{R}_j . На відміну від заздалегідь невідомих реакцій в'язей, активні сили є заданими функціями часу, положень і швидкостей точок системи:

$$\vec{F}_j = \vec{F}_j(t, \vec{r}_j, \vec{v}_j), \quad j = \overline{1, N}.$$

Запишемо диференціальні рівняння руху системи:

$$m_j \ddot{x}_j = F_{jx} + R_{jx}; \quad m_j \ddot{y}_j = F_{jy} + R_{jy}; \quad m_j \ddot{z}_j = F_{jz} + R_{jz}; \quad j = \overline{1, N}. \quad (9.8)$$

Основну задачу динаміки невідільної системи можна сформулювати так: визначити рух системи і реакції в'язей, якщо відомі активні сили і задані сумісні з в'язями початкові положення та початкові швидкості точок системи. У цій задачі $6N$ невідомих величин: $3N$ декартових координат точок x_j, y_j, z_j і $3N$ проекцій реакцій в'язей R_{jx}, R_{jy}, R_{jz} . Кількість скалярних співвідношень, що зв'язують невідомі величини, дорівнює $3N + d$: $3N$ рівнянь (9.8) і d рівнянь в'язей. Для того щоб основна задача динаміки стала визначеною, необхідні додаткові співвідношення, число яких повинно бути рівним $6N - (3N + d) = 3N - d = s$. Ці співвідношення можна отримати, вважаючи всі в'язі, накладені на систему, ідеальними.

В'язі називають *ідеальними*, якщо сума робіт реакцій в'язей на будь-якому віртуальному переміщенні системи з будь-якого її положення дорівнює нулю:

$$\sum_{j=1}^N \vec{R}_j \cdot \delta \vec{r}_j = 0. \quad (9.9)$$

Перепишемо отриману рівність в розгорнутому вигляді:

$$\sum_{j=1}^N (R_{jx} \delta x_j + R_{jy} \delta y_j + R_{jz} \delta z_j) = 0. \quad (9.10)$$

Серед $3N$ варіацій координат $\delta x_j, \delta y_j, \delta z_j \in 3N - d = s$ незалежних. Тому, виразивши $3N - s = d$ залежних варіацій у рівності (9.10) через незалежні і прирівнюючи нулю коефіцієнти при незалежних варіаціях, одержимо необхідні s співвідношень.

Розглянемо як приклад ідеальної в'язі гладку нерухому поверхню (рис. 9.6), по якій рухається матеріальна точка M . Оскільки

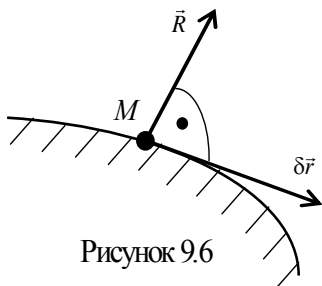


Рисунок 9.6

реакція поверхні напрямлена по нормалі до неї в даній точці, а вектор будь-якого віртуального переміщення лежить в площині, дотичній до поверхні в точці M , скалярний добуток

$$\vec{R} \cdot \delta \vec{r} = 0. \quad (9.11)$$

Гладка поверхня є ідеальною в'яззю і в тому випадку, коли вона рухається або деформується. Дійсно, визначаючи віртуальне переміщення, фіксують час, «зупиняючи» в'язь, тому вектор $\delta \vec{r}$ залишається в дотичній площині. Оскільки реакція гладкої поверхні і у випадку рухомої або деформівної поверхні спрямована по нормалі до неї, умова (9.11) виконується.

Неважко показати, що ідеальними є й інші в'язі, що використовують в механічних моделях. До їх числа відносяться шарніри без тертя, невагомі недеформівні стержні, внутрішні в'язі абсолютно твердого тіла та інші. У тих випадках, коли тертям знехтувати не можна, можна враховувати тільки нормальні складові реакцій шорстких поверхонь, відносячи сили тертя до числа невідомих активних сил. Ці невідомі визначають за допомогою додаткових співвідношень, що впливають з експериментально отриманих законів тертя.

Надалі всі в'язі, накладені на систему, будемо вважати ідеальними.

9.6. Узагальнені сили

Розглянемо механічну систему, положення якої однозначно визначається s узагальненими координатами q_1, q_2, \dots, q_s .

Виразимо радіус-вектори точок системи через узагальнені координати і час

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_1, \dots, q_s, t); \quad j = \overline{1, N} \quad (9.12)$$

і знайдемо варіації радіус-векторів

$$\delta \vec{r}_j = \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \delta q_k, \quad j = \overline{1, N}. \quad (9.13)$$

Визначимо суму робіт всіх активних сил на деякому віртуальному переміщенні системи:

$$\delta A = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j. \quad (9.14)$$

З формул (9.14) і (9.13), змінюючи порядок підсумовування, отримаємо

$$\delta A = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \cdot \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^s \left(\sum_{j=1}^N \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \right) \delta q_k. \quad (9.15)$$

Введемо позначення

$$Q_k = \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}, \quad k = \overline{1, s}, \quad (9.16)$$

тоді рівність (9.15) прийме вигляд:

$$\delta A = \sum_{k=1}^s Q_k \delta q_k. \quad (9.17)$$

Величину Q_k , що дорівнює коефіцієнту при варіації узагальненої координати δq_k у виразі для віртуальної роботи активних сил системи, називають *узагальненою силою*, відповідною узагальненій координаті q_k .

При визначенні узагальнених сил можна використовувати наступний прийом. Дано системі таке віртуальне переміщення, при якому змінюється тільки одна узагальнена координата, відповідна шуканій узагальненій силі, і обчислимо суму робіт активних сил. Припустимо, що $\delta q_1 \neq 0$, $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_s = 0$, тоді з рівності (9.17) отримаємо $\delta A_1 = Q_1 \delta q_1$, тобто

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta q_1}. \quad (9.18)$$

Аналогічно можна визначити і інші узагальнені сили.

Приклад 4. Система складається з тонкого однорідного стержня 1 довжиною l і кульки 2, яку будемо вважати матеріальною точкою (рис. 9.7).

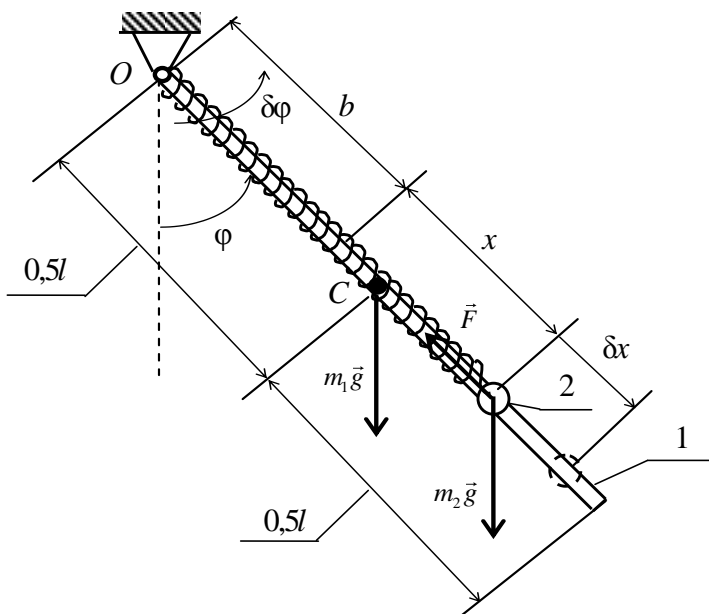


Рисунок 9.7

Стержень може обертатися навколо горизонтальної осі O , а кулька має отвір, що дозволяє їй ковзати уздовж стержня. Невагома пружина навита на стержень, один її кінець з'єднаний з кулькою, а другий закріплений в точці O . Жорсткість пружини і її довжина в недеформованому стані дорівнюють відповідно c і b , а маси стержня і кульки – m_1 і m_2 .

Ввести узагальнені координати і визначити узагальнені сили. Тертям знехтувати.

Положення системи повністю визначається двома координатами: кутом φ відхилення стержня від вертикалі і деформацією пружини x , які прийемо за узагальнені координати. Система, таким чином, має два степеня вільності. Покажемо діючі на систему активні сили: сили ваги $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ і силу пружності пружини \vec{F} .

Для визначення узагальної сили Q_φ , відповідної узагальненій координаті φ , дамо системі віртуальне переміщення, при якому координата x не змінюється, а кут φ отримує приріст $\delta\varphi$. На цьому переміщенні роботу виконують тільки сили ваги, оскільки сила \vec{F} перпендикулярна напрямку переміщення кульки. Визначимо роботи сил

ваги за формулою (7.21), попередньо обчисливши їх моменти відносно осі обертання:

$$M_z(m_1\vec{g}) = -m_1g \cdot 0,5l \sin \varphi; \quad M_z(m_2\vec{g}) = -m_2g(b+x) \sin \varphi;$$

$$\delta A_\varphi = M_z(m_1\vec{g})\delta\varphi + M_z(m_2\vec{g})\delta\varphi = -0,5m_1gl \sin \varphi \delta\varphi - m_2g(b+x) \sin \varphi \delta\varphi;$$

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = -g[0,5m_1l + m_2(b+x)] \sin \varphi. \quad (9.19)$$

Для визначення узагальненої сили Q_x дамо системі віртуальне переміщення, при якому не буде змінюватися кут φ , а координата x одержить приріст δx . На цьому переміщенні роботу виконують дві сили: сила ваги $m_2\vec{g}$ і сила пружності пружини, модуль якої $F = cx$:

$$\delta A_x = m_2g\delta x \cos \varphi - cx\delta x;$$

$$Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = m_2g \cos \varphi - cx. \quad (9.20)$$

9.7. Загальне рівняння динаміки

Далі будемо розглядати систему, що складається з N матеріальних точок, з ідеальними і голономними в'язями, положення якої однозначно визначається s узагальненими координатами q_1, q_2, \dots, q_s . Запишемо для кожної точки системи основне рівняння динаміки

$$m_j\vec{a}_j = \vec{F}_j + \vec{R}_j$$

або

$$\vec{F}_j - m_j\vec{a}_j + \vec{R}_j = 0, \quad j = \overline{1, N}. \quad (9.21)$$

Зафіксуємо час і дамо системі віртуальне переміщення, при якому радіус-вектори точок отримають приріст $\delta\vec{r}_j$. Помножимо скалярно кожне рівняння (9.21) на $\delta\vec{r}_j$ і складемо отримані добутки:

$$\sum_{j=1}^N (\vec{F}_j - m_j\vec{a}_j) \cdot \delta\vec{r}_j + \sum_{j=1}^N \vec{R}_j \cdot \delta\vec{r}_j = 0. \quad (9.22)$$

Оскільки в'язі ідеальні, остання сума дорівнює нулю і з рівняння (9.22) отримаємо:

$$\sum_{j=1}^N (\vec{F}_j - m_j \vec{a}_j) \cdot \delta \vec{r}_j = 0. \quad (9.23)$$

Враховуючи, що $-m_j \vec{a}_j = \vec{\Phi}_j$ – це сила інерції j -ої матеріальної точки, $\vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \delta A_j^a$, $\vec{\Phi}_j \cdot \delta \vec{r}_j = \delta A_j^\Phi$ – роботи активної сили і сили інерції, перепишемо рівність (9.23) у вигляді:

$$\sum_{j=1}^N \delta A_j^a + \sum_{j=1}^N \delta A_j^\Phi = 0. \quad (9.24)$$

Це рівняння називають *загальним рівнянням динаміки*. Воно стверджує, що при русі системи з ідеальними в'язями в будь-який момент часу сума робіт активних сил і сил інерції на будь-якому віртуальному переміщенні системи дорівнює нулю.

Приклад 5. Вантаж 1, що рухається вниз по похилій площині, приводить в рух барабан 2 і коток 3. Радіус інерції барабана відносно осі обертання $i_{2x} = r\sqrt{2}$, $R = 2r$; коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,1$; ваги тіл 1, 2 і 3: $G_1 = 2G$, $G_2 = G_3 = G$.

Визначити прискорення вантажу, вважаючи коток однорідним циліндром, який котиться без ковзання, і нехтуючи тертям кочення і силами опору в підшипниках.

Для розв'язання задачі використаємо загальне рівняння динаміки. Покажемо активні сили, що діють на систему (сили ваги $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3$) і силу тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тр}}$, до яких додамо сили інерції. Для вантажу 1, що рухається поступально, вони приводяться до рівнодійної, модуль якої

$$R_1^\Phi = \frac{G_1}{g} a_1 = \frac{2G}{g} a_1;$$

для барабана 2, що обертається навколо нерухомої осі, – до пари сил, момент якої

$$M_2^\Phi = I_2 \varepsilon_2 = \frac{G_2}{g} i_{2x}^2 \cdot \frac{a_1}{r} = \frac{G}{g} 2r^2 \cdot \frac{a_1}{r} = \frac{2G}{g} r a_1;$$

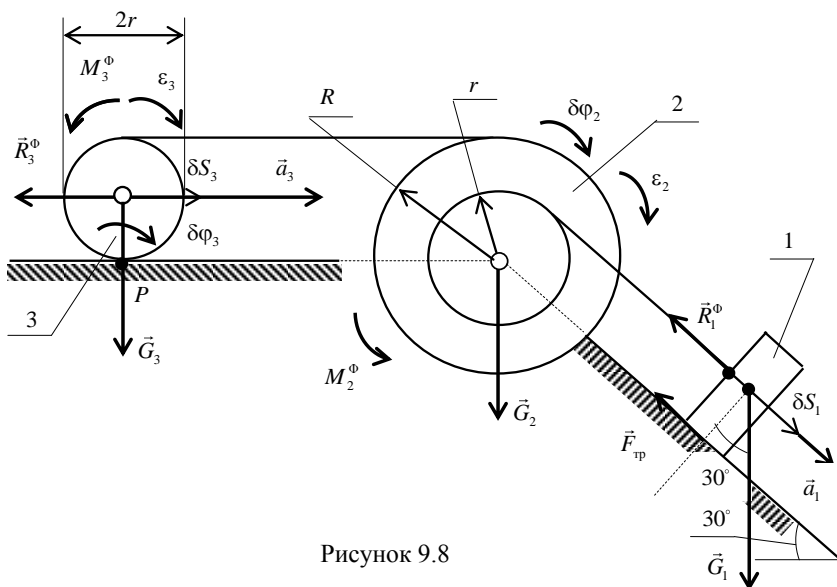


Рисунок 9.8

для котка 3, що здійснює плоский рух, – до сили , прикладеної в його центрі мас, модуль якої

$$R_3^{\Phi} = \frac{G_3}{g} a_3 = \frac{G}{g} a_3,$$

і до пари сил, момент якої

$$M_3^{\Phi} = I_3 \varepsilon_3 = \frac{G_3}{2g} r^2 \cdot \frac{a_3}{r} = \frac{G}{2g} r a_3,$$

де a_1, a_3 – прискорення вантажу та центру мас котка; $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ – кутові прискорення барабана і котка.

Дамо системі віртуальне переміщення в напрямку її дійсного руху і складемо загальне рівняння динаміки (9.24), яке для даної системи прийме вигляд:

$$G_1 \sin 30^\circ \delta S_1 - F_{\text{тр}} \delta S_1 - R_1^{\Phi} \delta S_1 - M_2^{\Phi} \delta \varphi_2 - R_3^{\Phi} \delta S_3 - M_3^{\Phi} \delta \varphi_3 = 0, \quad (9.25)$$

де $\delta S_1, \delta S_3$ – переміщення вантажу та центру мас котка; $\delta\varphi_2, \delta\varphi_3$ – кути повороту барабана і котка; $F_{\text{тр}}$ – модуль сили тертя, що дорівнює $F_{\text{тр}} = fG_1 \cos 30^\circ = 2fG \cos 30^\circ$. Система має один степінь вільності, тому всі варіації координат можна виразити через одну з них. Враховуючи, що точка P – миттєвий центр швидкостей котка, отримаємо

$$\delta S_3 = \frac{1}{2} R \delta\varphi_2 = \frac{1}{2} 2r \delta\varphi_2 = r \delta\varphi_2; \quad \delta S_1 = r \delta\varphi_2; \quad \delta\varphi_3 = \frac{\delta S_3}{r} = \delta\varphi_2. \quad (9.26)$$

Визначимо залежності між прискореннями:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r}; \quad a_3 = \frac{1}{2} R \varepsilon_2 = \frac{1}{2} 2r \frac{a_1}{r} = a_1; \quad \varepsilon_3 = \frac{a_3}{r} = \frac{a_1}{r}. \quad (9.27)$$

Підставимо в рівняння (9.25) вирази для сил і моментів сил інерції, а також співвідношення (9.26), (9.27) і отримаємо:

$$\left(2G \sin 30^\circ - 2fG \cos 30^\circ - \frac{2G}{g} a_1 \right) r \delta\varphi_2 - \frac{2G}{g} r a_1 \delta\varphi_2 - \frac{G}{g} r a_1 \delta\varphi_2 - \frac{G}{2g} r a_1 \delta\varphi_2 = 0.$$

Розділимо це рівняння на величину $Gr \delta\varphi_2 \neq 0$ і визначимо:

$$2 \sin 30^\circ - 2f \cos 30^\circ - \frac{2a_1}{g} - \frac{2a_1}{g} - \frac{a_1}{g} - \frac{a_1}{2g} = 0;$$

$$5,5 \frac{a_1}{g} = 2(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ);$$

$$a_1 = \frac{2g}{5,5} (\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ) = \frac{2 \cdot 9,8}{5,5} (\sin 30^\circ - 0,1 \cos 30^\circ) = 1,473 \text{ м/с}^2.$$

Загальне рівняння динаміки дозволяє отримувати диференціальні рівняння руху механічної системи, в які не входять реакції ідеальних в'язей. Воно може бути використано для систем як з одним, так і з декількома степенями вільності. В останньому випадку диференціальні рівняння руху, число яких збігається з числом степенів вільності системи, можуть бути отримані шляхом складання рівняння (9.24) для s незалежних між собою віртуальних переміщень системи. Однак ефективність використання загального рівняння динаміки істотно знижується зі збільшенням числа степенів вільності системи. Це пов'язано з необхідністю введення сил інерції і, отже, визначенням абсолютних

прискорень точок системи, що призводить до досить громіздких викладок. У таких випадках більш зручним є складання диференціальних рівнянь руху у формі рівнянь Лагранжа другого роду, які будуть отримані в наступному підрозділі.

9.8 . Рівняння Лагранжа другого роду

Перетворимо рівняння (9.23), підставивши в нього варіацію радіус-вектора $\delta \vec{r}_j$ за формулою (9.13):

$$\sum_{j=1}^N (\vec{F}_j - m_j \vec{a}_j) \cdot \delta \vec{r}_j = \sum_{j=1}^N \left(\vec{F}_j - m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} \right) \cdot \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \delta q_k = 0.$$

Змінюючи порядок підсумовування, отримаємо:

$$\sum_{k=1}^s \left(\sum_{j=1}^N \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^N m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0.$$

Враховуючи формулу (9.16) для узагальненої сили Q_k , спростимо останню рівність:

$$\sum_{k=1}^s \left(Q_k - \sum_{j=1}^N m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0. \quad (9.28)$$

Перетворимо добуток під знаком суми:

$$m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(m_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} \right) - m_j \vec{v}_j \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}. \quad (9.29)$$

Швидкість j -ї точки системи

$$\vec{v}_j = \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t}. \quad (9.30)$$

Вона лінійно залежить від узагальнених швидкостей \dot{q}_k , $k = \overline{1, s}$, тому що радіус-вектори \vec{r}_j і, отже, їх частинні похідні $\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}$, $\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t}$ залежать тільки від узагальнених координат і часу, як випливає з формули (9.12). Тому, диференціюючи частинним способом обидві частини рівності (9.30) за узагальненою швидкістю, отримаємо:

$$\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}, \quad j = \overline{1, N}; \quad k = \overline{1, s}. \quad (9.31)$$

Продиференціюємо (9.30) за узагальненою координатою:

$$\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_1 \partial q_k} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial q_s \partial q_k} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \vec{r}_j}{\partial t \partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}; \quad (9.32)$$

$$j = \overline{1, N}; \quad k = \overline{1, s}.$$

Останній результат є наслідком незалежності змішаних частинних похідних від порядку диференціювання.

Враховуючи рівності (9.31) і (9.32), перепишемо співвідношення (9.29):

$$\begin{aligned} m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left(m_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_k} = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{m_j v_j^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{m_j v_j^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_j}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T_j}{\partial q_k}, \end{aligned} \quad (9.33)$$

де $T_j = \frac{m_j v_j^2}{2}$ – кінетична енергія j -ї точки системи. Підставимо отримане співвідношення в рівняння (9.28):

$$\sum_{k=1}^s \left[Q_k - \sum_{j=1}^N \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T_j}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T_j}{\partial q_k} \right) \right] \delta q_k = 0. \quad (9.34)$$

Змінюючи порядок підсумовування і диференціювання, а також враховуючи, що $\sum_{j=1}^N T_j = T$, де T – кінетична енергія системи, з рівняння (9.34) отримаємо:

$$\sum_{k=1}^s \left[Q_k - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) \right] \delta q_k = 0. \quad (9.35)$$

Оскільки варіації узагальнених координат δq_k є довільними незалежними величинами, рівність (9.35) має місце тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти при δq_k дорівнюють нулю, тобто

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k; \quad k = \overline{1, s}. \quad (9.36)$$

Рівняння (9.36) носять назву *рівнянь Лагранжа другого роду* або *рівнянь Лагранжа в незалежних координатах*. Після виконання операцій диференціювання в ліві частини цих рівнянь входять такі параметри: час t , узагальнені координати q_k , узагальнені швидкості \dot{q}_k і узагальнені прискорення \ddot{q}_k . Узагальнені сили Q_k залежать від параметрів t , q_k , \dot{q}_k . Таким чином, рівняння Лагранжа являють собою систему s звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку, тобто порядок всієї системи дорівнює $2s$. Однак порядок системи диференціальних рівнянь, що описують рух голономних системи з s степенями вільності, не може бути менше, ніж $2s$, тому що в силу довільності початкових значень величин q_k і \dot{q}_k , $k = \overline{1, s}$ розв'язок системи має містити, принаймні, $2s$ довільних сталих інтегрування. Тому система рівнянь Лагранжа другого роду має найменший можливий порядок.

Інтегрування рівнянь (9.36) дозволяє отримати залежності узагальнених координат від часу $q_k = q_k(t)$, $k = \overline{1, s}$, що повністю визначає рух системи. У разі невідомої системи слід також визначити реакції ідеальних в'язей, які не входять до рівнянь Лагранжа. Підставивши залежності $q_i(t)$ у вирази (9.12), отримаємо залежності радіус-векторів точок системи від часу $\vec{r}_j = \vec{r}_j(t)$, $j = \overline{1, N}$, диференціюючи які, визначимо швидкості $\vec{v}_j = \dot{\vec{r}}_j$ і прискорення $\vec{a}_j = \ddot{\vec{r}}_j$ всіх точок. Після цього знайдемо реакції в'язей з рівнянь (9.21):

$$\vec{R}_j = m_j \vec{a}_j - \vec{F}_j, \quad j = \overline{1, N}.$$

Приклад 6. Розв'яжемо задачу (див. рис. 9.8 прикладу 5 з підрозділу 9.7) за допомогою рівняння Лагранжа другого роду.

Система має один степінь вільності. В якості узагальненої координати виберемо координату x вантажу 1 (рис. 9.9), тоді рівняння Лагранжа запишемо так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (9.37)$$

Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій тіл 1, 2 і 3:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (9.38)$$

Вантаж 1 рухається поступально, барабан 2 обертається навколо нерухомої осі, а коток 3 здійснює плоский рух. Визначимо їх кінетичні енергії:

$$T_1 = \frac{G_1}{2g} v_1^2; \quad T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2; \quad T_3 = \frac{G_3}{2g} v_{C_3}^2 + \frac{1}{2} I_{C_3} \omega_3^2, \quad (9.39)$$

де моменти інерції:

$$I_2 = \frac{G_2}{g} i_{2x}^2 = \frac{G}{g} \cdot 2r^2; \quad I_{C_3} = \frac{G_3}{2g} r^2 = \frac{G}{2g} r^2. \quad (9.40)$$

Виразимо всі швидкості через узагальнену швидкість \dot{x} , враховуючи, що в точці P знаходиться миттєвий центр швидкостей котка:

$$v_1 = \dot{x}; \quad \omega_2 = \frac{v_1}{r} = \frac{\dot{x}}{r}; \quad v_{C_3} = \frac{1}{2} v_3 = \frac{1}{2} \omega_2 R = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{x}}{r} \cdot 2r = \dot{x}; \quad \omega_3 = \frac{v_{C_3}}{r} = \frac{\dot{x}}{r}. \quad (9.41)$$

Зі співвідношень (9.38)–(9.41) отримаємо:

$$T = \frac{2G}{2g} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} \cdot 2r^2 \cdot \frac{\dot{x}^2}{r^2} + \frac{G}{2g} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{2g} r^2 \cdot \frac{\dot{x}^2}{r^2} = 2,75 \frac{G}{g} \dot{x}^2. \quad (9.42)$$

Визначимо похідні від кінетичної енергії:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 5,5 \frac{G}{g} \ddot{x}. \quad (9.43)$$

Для визначення узагальненої сили Q_x дамо системі віртуальне переміщення, при якому барабан 2 повернеться на кут $\delta\varphi_2$, вантаж 1 переміститься на відстань δx , а центр мас котка 3 – на δS_3 . Визначимо суму робіт активних сил на цьому переміщенні. Оскільки сила \vec{G}_2 прикладена в нерухомій точці, а центр мас котка рухається в горизонтальній площині, роботи сил \vec{G}_2 і \vec{G}_3 дорівнюють нулю. Таким чином, роботу виконують тільки сили \vec{G}_1 і $\vec{F}_{\text{тр}}$

$$\delta A_x = \delta A_{G_1} + \delta A_{F_{\text{тр}}} = G_1 \sin 30^\circ \delta x - F_{\text{тр}} \delta x = (2G \sin 30^\circ - 2fG \cos 30^\circ) \delta x,$$

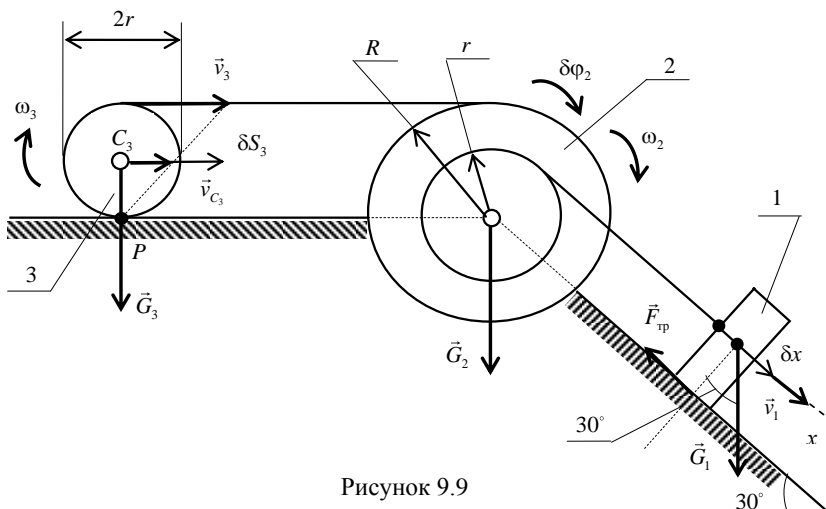


Рисунок 9.9

звідки

$$Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = 2G(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ). \quad (9.44)$$

Підставивши (9.43) і (9.44) в рівняння (9.37), отримаємо диференціальне рівняння руху системи:

$$5,5 \frac{G}{g} \ddot{x} = 2G(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ),$$

звідки визначимо прискорення вантажу 1:

$$a_1 = \ddot{x} = \frac{2g}{5,5} (\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ) = \frac{2 \cdot 9,8}{5,5} (\sin 30^\circ - 0,1 \cos 30^\circ) = 1,473 \text{ м/с}^2.$$

В якості ще одного прикладу розглянемо систему з двома степенями вільності, наведену на рис. 9.7 у підрозділі 9.6, для якої отримаємо диференціальні рівняння руху. Використовуючи обрані раніше узагальнені координати φ і x , складемо рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (9.45)$$

Кінетична енергія системи являє собою суму кінетичних енергій стержня 1 і кульки 2 (рис. 9.10): $T = T_1 + T_2$. Стержень обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю $\omega = \dot{\phi}$, а кулька, що приймається за матеріальну точку, здійснює складний рух. Її відносна швидкість \vec{v}_r напрямлена вздовж стержня, переносна швидкість \vec{v}_e перпендикулярна стержню, $v_r = \dot{x}$, $v_e = (b+x)\omega = (b+x)\dot{\phi}$.

Визначимо кінетичні енергії:

▪ стержня 1

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_1 l^2 \dot{\phi}^2 = \frac{1}{6} m_1 l^2 \dot{\phi}^2,$$

де $I_1 = \frac{1}{3} m_1 l^2$ – момент інерції стержня відносно осі обертання;

▪ кульки 2

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_a^2 = \frac{1}{2} m_2 (v_r^2 + v_e^2) = \frac{1}{2} m_2 [\dot{x}^2 + (b+x)^2 \dot{\phi}^2];$$

▪ системи

$$T = \frac{1}{6} m_1 l^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (b+x)^2 \dot{\phi}^2.$$

Визначимо похідні від кінетичної енергії:

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{3} m_1 l^2 \dot{\phi} + m_2 (b+x)^2 \dot{\phi};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{3} m_1 l^2 \ddot{\phi} + m_2 (b+x)^2 \ddot{\phi} + 2m_2 (b+x) \dot{x} \dot{\phi};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m_2 (b+x) \dot{\phi}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_2 \dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_2 \ddot{x}.$$

Підставимо отримані співвідношення, а також визначені раніше узагальнені сили (9.19) і (9.20) в рівняння (9.45) і отримаємо диференціальні рівняння руху даної системи:

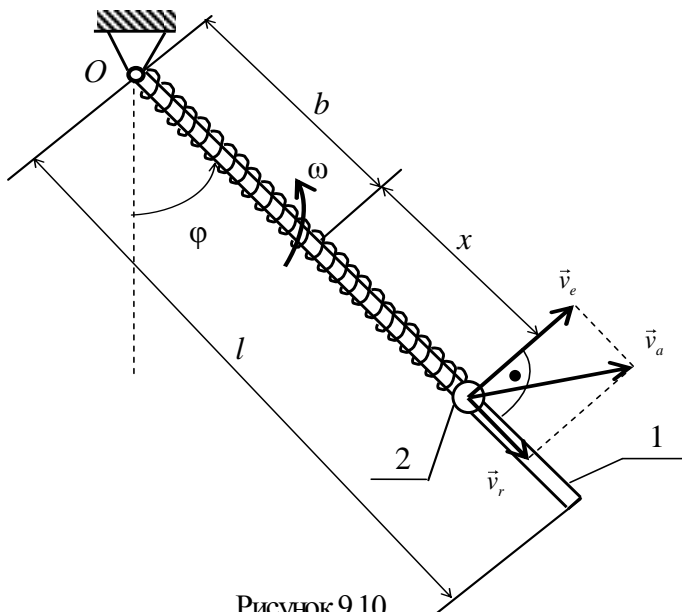


Рисунок 9.10

$$\left[\frac{m_1 l^2}{3} + m_2 (b+x)^2 \right] \ddot{\phi} + 2m_2 (b+x) \dot{x} \dot{\phi} = -g [0,5m_1 l + m_2 (b+x)] \sin \varphi ;$$

$$m_2 \ddot{x} - m_2 (b+x) \dot{\phi}^2 = m_2 g \cos \varphi - cx .$$

Залежності узагальнених координат від часу, що описують рух системи, можуть бути визначені шляхом чисельного інтегрування отриманих нелінійних диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах.

9.9. Принцип віртуальних переміщень

Завершуючи короткий огляд понять аналітичної механіки і методів опису руху механічної системи, зупинимося на розгляді стану її рівноваги, яка є окремим випадком руху системи. Рівновагою є такий стан механічної системи, при якому всі її точки під дією прикладених сил залишаються в спокої по відношенню до вибраної системи відліку. Будемо розглядати рівновагу відносно інерціальної системи відліку.

Необхідні і достатні умови рівноваги механічної системи є змістом **принципу віртуальних переміщень**. Для того щоб деякий стан системи, підпорядкованої ідеальним, голономним, стаціонарним і утримуючим в'язям, був станом рівноваги, необхідно і достатньо, щоб початкові швидкості всіх точок системи були рівні нулю і сума робіт всіх активних сил на будь-якому її віртуальному переміщенні з даного положення дорівнювала нулю, тобто

$$\vec{v}_j(t_0) = 0; \quad \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \cdot \delta \vec{r}_j = 0. \quad (9.46)$$

Необхідність виконання цих умов випливає з загального рівняння динаміки. Дійсно, якщо система знаходиться в рівновазі, то швидкості і прискорення всіх її точок дорівнюють нулю. Тому з рівняння (9.23) отримаємо другу умову (9.46). Достатність доведемо від протилежного. Нехай умови (9.46) виконуються, але рух системи почався, і її точки отримали прискорення $\vec{a}_j \neq 0$. З умови ідеальності в'язей випливає:

$$\sum_{j=1}^N \vec{R}_j \cdot \delta \vec{r}_j = 0. \quad (9.47)$$

Тепер додамо друге рівняння (9.46) і рівняння (9.47):

$$\sum_{j=1}^N (\vec{F}_j + \vec{R}_j) \cdot \delta \vec{r}_j = 0,$$

але $\vec{F}_j + \vec{R}_j = m_j \vec{a}_j$, тому

$$\sum_{j=1}^N m_j \vec{a}_j \cdot \delta \vec{r}_j = 0. \quad (9.48)$$

Оскільки початкові швидкості точок нульові, а в'язі стаціонарні, переміщення, пропорційні прискоренням, є можливими і, отже, віртуальними переміщеннями точок системи. Виберемо в якості віртуальних переміщень $\delta \vec{r}_j = \alpha \vec{a}_j$ і з (9.48) отримаємо

$$\alpha \sum_{j=1}^N m_j a_j^2 = 0,$$

що неможливо, якщо справедливе припущення про ненульові прискорення. Таким чином, прискорення всіх точок дорівнюють нулю і, оскільки початкові швидкості нульові, система знаходиться в стані рівноваги.

В принципі віртуальних переміщень умови рівноваги механічної системи сформульовані в найбільш загальному вигляді та рівняння рівноваги не містять реакцій ідеальних в'язей.

Приклад 7. На шток кулісного механізму діє сила, як показано на рис. 9.11.

Визначити величину зрівноважувальної сили \vec{Q} , прикладеної в точці C куліси перпендикулярно до неї, якщо задані кут φ і розміри l і R . Тертя знехтувати.

Механізм знаходиться в рівновазі під дією двох активних сил \vec{P} і \vec{Q} . Дано системі віртуальне переміщення, при якому кут φ одержить приріст $\delta\varphi$, а координата y_A повзуна A – приріст δy_A , і запишемо рівняння рівноваги:

$$P\delta y_A - QR\delta\varphi = 0. \quad (9.49)$$

Залежності між варіаціями координат можна встановити аналітичним або геометричним способами.

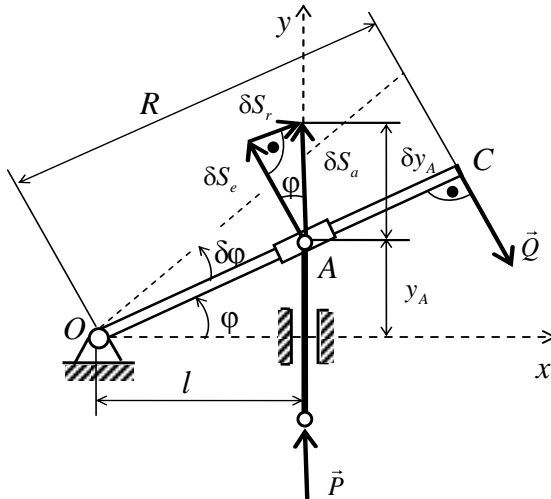


Рисунок 9.11

Аналітичний спосіб. Визначивши залежність між координатами $y_A = l \operatorname{tg} \varphi$, проваріюємо її:

$$\delta y_A = \frac{l}{\cos^2 \varphi} \delta \varphi. \quad (9.50)$$

Геометричний спосіб. Розглянемо абсолютне переміщення δS_a повзуна як суму його переносного δS_e і відносного δS_r переміщень і отримаємо:

$$\delta S_a = \delta y_A = \frac{\delta S_e}{\cos \varphi} = \frac{OA \cdot \delta \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\frac{l}{\cos \varphi} \cdot \delta \varphi}{\cos \varphi} = \frac{l \delta \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

що збігається із співвідношенням (9.50). Підставимо його в рівняння (9.49):

$$P \frac{l \delta \varphi}{\cos^2 \varphi} - QR \delta \varphi = 0.$$

Розділимо отримане рівняння на величину $\delta \varphi \neq 0$ і знайдемо:

$$Q = \frac{Pl}{R \cos^2 \varphi}.$$

Нехай положення системи визначається s узагальненими координатами q_1, q_2, \dots, q_s , тоді віртуальну роботу активних сил можна обчислити за формулою (9.17) і рівняння (9.46) прийме вигляд:

$$\sum_{k=1}^s Q_k \delta q_k = 0. \quad (9.51)$$

Однак варіації δq_k довільні і незалежні, тому з рівняння (9.51) випливає, що всі узагальнені сили дорівнюють нулю, тобто

$$Q_k = 0, k = \overline{1, s}. \quad (9.52)$$

Таким чином, для рівноваги системи з ідеальними, голономними, стаціонарними та утримуючими в'язями необхідно і достатньо, щоб початкові швидкості всіх точок системи і всі узагальнені сили були рівні нулю.

Використаємо отримані умови для визначення положень рівноваги системи з двома степенями вільності, що показана на рис. 9.7

Для цього прирівняємо нулю узагальнені сили Q_φ і Q_x , які визначаються формулами (9.19) і (9.20):

$$Q_\varphi = -g[0,5m_1l + m_2(b+x)]\sin\varphi = 0; \quad (9.53)$$

$$Q_x = m_2g \cos\varphi - cx = 0. \quad (9.54)$$

Конструкція системи така, що $b+x > 0$, тому $0,5m_1l + m_2(b+x) > 0$ і з рівняння (9.53) випливає, що $\sin\varphi = 0$. Це означає, що рівновага системи можлива при $\varphi_1 = 0$ (нижнє вертикальне положення стержня) і при $\varphi_2 = \pi$ (його верхнє вертикальне положення). З рівняння (9.54) при $\varphi = \varphi_1 = 0$ випливає, що $m_2g - cx = 0$, $x = \frac{m_2g}{c} > 0$, тобто пружина розтягнута, а при $\varphi = \varphi_2 = \pi$ отримаємо $-m_2g - cx = 0$, $x = -\frac{m_2g}{c} < 0$, тобто пружина стиснута.

Питання для самоконтролю

1. Як сформулювати поняття вільної та невідільної систем матеріальних точок?
2. Що являють собою в'язі?
3. Які види в'язей існують і як їх визначити?
4. Яку механічну систему називають голономною?
5. Що називають віртуальним переміщенням матеріальної точки?
6. Як визначити число степенів вільності системи?
7. Які величини називають узагальненими координатами?
8. Які в'язі називають ідеальними?
9. Що називають узагальненою силою?
10. Який вигляд має загальне рівняння динаміки?
11. Як записати систему рівнянь Лагранжа другого роду?
12. Як сформулювати принцип віртуальних переміщень?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики : у 2 т. Т.1. Статика и кинематика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М. : Наука, 1985. – 240 с.
2. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики : у 2 т. Т.2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М. : Наука, 1985. – 496 с.
3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики: у 2 ч. / А.А. Яблонский. ч.1. Статика. Кинематика. – М. : Высшая школа, 1984. – 343 с.
4. Яблонский А.А. Курс теоретической механики: у 2 ч. / А.А. Яблонский. ч.2. Динамика. – М. : Высшая школа, 1984. – 423 с.
5. Попов М.В. Теоретическая механика. Краткий курс / М.В. Попов. – М. : Наука, 1986. – 336 с.
6. Теоретическая механика. Терминология, вып. 90. – М. : Наука, 1977. – 46 с.
7. Ільчишина Д.І. Теоретична механіка / Д.І. Ільчишина, Л.М. Шальда. – К. : УМК ВО, 1991. – 252 с.
8. Беломытцев А.С. Теоретическая механика. Краткий курс. Статика и кинематика : тексты лекций для студентов заочной формы обучения всех специальностей / А.С. Беломытцев. – Х. : НТУ «ХПИ», 2004. – 76 с.

ЗМІСТ

| | |
|--|----|
| Вступ | 3 |
| Лекція 1. Динаміка матеріальної точки | 4 |
| 1.1. Закони динаміки Галілея-Ньютона | 4 |
| 1.2. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки | 5 |
| Питання для самоконтролю | 8 |
| Лекція 2. Коливання матеріальної точки | 9 |
| 2.1. Класифікація сил, що діють на матеріальну точку | 9 |
| 2.2. Диференціальне рівняння прямолінійних коливань матеріальної точки | 10 |
| 2.3. Вільні коливання в середовищі без опору | 11 |
| 2.4. Вільні коливання при наявності в'язкого опору | 14 |
| 2.5. Змушені коливання. Загальний випадок | 16 |
| 2.6. Змушені коливання в середовищі без опору | 21 |
| Питання для самоконтролю | 22 |
| Лекція 3. Динаміка відносного руху матеріальної точки | 23 |
| 3.1. Рівняння відносного руху | 23 |
| 3.2. Принцип відносності класичної механіки | 26 |
| 3.3. Умови відносного спокою. Сила ваги | 26 |
| Питання для самоконтролю | 30 |
| Лекція 4. Механічна система. Тверде тіло і його моменти інерції | 31 |
| 4.1. Маса і центр мас механічної системи | 31 |
| 4.2. Зовнішні і внутрішні сили | 31 |
| 4.3. Моменти інерції твердого тіла | 32 |
| 4.4. Моменти інерції тіла відносно паралельних осей | 34 |
| 4.5. Приклади визначення моментів інерції однорідних тіл | 36 |
| Питання для самоконтролю | 38 |
| Лекція 5. Теореми про зміну кількості руху і про рух центру мас механічної системи | 39 |
| 5.1. Загальні теореми динаміки. Міри механічного руху та міри дії сили | 39 |
| 5.2. Кількість руху матеріальної точки і механічної системи | 39 |
| 5.3. Імпульс сили | 40 |
| 5.4. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки | 41 |
| 5.5. Теорема про зміну кількості руху механічної системи. | 43 |

| | |
|--|----|
| 5.6. Теорема Ейлера | 46 |
| 5.7. Теорема про рух центру мас механічної системи | 50 |
| Питання для самоконтролю | 54 |
| Лекція 6. Теорема про зміну кінетичного моменту | 55 |
| 6.1. Кінетичний момент матеріальної точки і механічної системи | 55 |
| 6.2. Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної точки | 57 |
| 6.3. Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи | 58 |
| 6.4. Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла | 63 |
| Питання для самоконтролю | 65 |
| Лекція 7. Теорема про зміну кінетичної енергії | 66 |
| 7.1. Кінетична енергія матеріальної точки і механічної системи | 66 |
| 7.2. Кінетична енергія твердого тіла | 67 |
| 7.3. Робота сили і її потужність | 70 |
| 7.4. Визначення робіт деяких сил | 72 |
| 7.5. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки | 78 |
| 7.6. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи | 81 |
| Питання для самоконтролю | 85 |
| Лекція 8. Метод кінетостатики | 86 |
| 8.1. Сила інерції і принцип Даламбера для матеріальної точки | 86 |
| 8.2. Принцип Даламбера для механічної системи | 88 |
| 8.3. Рівняння методу кінетостатики для механічної системи | 89 |
| 8.4. Головний вектор і головний момент сил інерції | 90 |
| 8.5. Зведення сил інерції точок твердого тіла до найпростішого вигляду | 91 |
| Питання для самоконтролю | 96 |
| Лекція 9. Елементи аналітичної механіки | 97 |
| 9.1. Вступ | 97 |
| 9.2. В'язі та їх класифікація | 97 |
| 9.3. Можливі і віртуальні переміщення | 99 |

| | |
|--|-----|
| 9.4. Число степенів вільності системи і узагальнені координати | 100 |
| 9.5. Основна задача динаміки невільної системи. Ідеальні в'язі | 102 |
| 9.6. Узагальнені сили | 103 |
| 9.7. Загальне рівняння динаміки | 106 |
| 9.8. Рівняння Лагранжа другого роду | 110 |
| 9.9. Принцип віртуальних переміщень | 116 |
| Питання для самоконтролю | 121 |
| Список літератури | 122 |

Навчальне видання

БЄЛОМИТЦЕВ Андрій Сергійович

Теоретична механіка. Динаміка

Тексти лекцій

для студентів бакалаврських напрямів 6.050202 – «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», 6.050502 – «Інженерна механіка», 6.050503 – «Машинобудування» Машинобудівного факультету

Роботу до друку рекомендував С.К. Шелковий

В авторській редакції

План 2014, п. 11

Підп. до друку Формат 60x84 1/16. Папір офісний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум.- друк. арк. 7,9.,
Наклад 100 прим. Зам. № . Ціна договірна.

—

Видавничий центр «НТУ ХП» .
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

—

Друкарня «НТУ ХП». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21